ПОСОБИЕ ПО МАТЕ МАТИКЕ ДЛЯ ТЕХ- НИКУМОВ

Н.Х. СИВАШИНСКИЙ

Пособие

ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

И. Х. СИВАШИНСКИЙ

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве пособия по внеклассной работе по математике в средних специальных учебных заведениях

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1970

51
С34
УДК 51

Сивашинский И. Х.

С 34 Пособие по математике для техникумов. М., «Высш. школа», 1970.

448 с. с илл.

Это пособие является сборником задач (с решениями) по математике для кружковой работы в техникумах.

Книга может быть также полезной для подготовки к вступительным экзаменам в такие вузы, в которых предъявляются повышенные требования по математике, и для самообразования.

51

2—2—2
70—211

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Задачи 5
Семинар 1 5
Задание 1 6
Семинар 2 7
Задание 2 7
Семинар 3 8
Задание 3 9
Семинар 4 10
Задание 4 10
Семинар 5 11
Задание 5 12
Семинар 6 13
Задание 6 14
Семинар 7 15
Задание 7 16
Семинар 8 17
Задание 8 18
Семинар 9 19
Задание 9 19
Семинар 10 20
Задание 10 21
Семинар 11 22
Задание 11 23
Семинар 12 23
Задание 12 24
Семинар 13 25
Задание 13 25
Семинар 14 26
Задание 14 27
Семинар 15 28
Задание 15 28
Семинар 16 30
Задание 16 30
Семинар 17 31
Задание 17 31
Семинар 18 33
Задание 18 34
Семинар 19 35
Задание 19 35
Семинар 20 36
Задание 20 37
Семинар 21 38
Задание 21 39
Семинар 22 40
Задание 22 40
Семинар 23 41
Задание 23 42
Семинар 24 43
Задание 24 44
Семинар 25 45
Задание 25 45
Семинар 26 46
Задание 26 47
Семинар 27 48
Задание 27 48
Семинар 28 49
Задание 28 49
Семинар 29 51
Задание 29 52
Семинар 30 53
Задание 30 54
Семинар 31 55
Задание 31 55
Семинар 32 56
Задание 32 57
Семинар 33 57
Задание 33 58
Семинар 34 59
Задание 34 60
Семинар 35 61
Задание 35 61
Семинар 36 62
Задание 36 63
Семинар 37 64
Задание 37 64

Семинар 38 66
Задание 38 66
Семинар 39 67
Задание 39 68
Семинар 40 69
Задание 40 69
Семинар 41 70
Задание 41 71
Семинар 42 72
Задание 42 73
Семинар 43 74
Задание 43 74
Семинар 44 75
Задание 44 76
Семинар 45 77
Задание 45 78
Семинар 46 79
Задание 46 79
Семинар 47 80
Задание 47 81
Семинар 48 82
Задание 48 82
Решения 84

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно, в техникумах почти не ведется кружковой работы по математике. Несомненно, что густота талантов среди учащихся различных средних учебных заведений примерно одинакова. Однако среди участников математических олимпиад нет учащихся техникумов и других средних специальных учебных заведений. Основной причиной этого является отсутствие работы по повышению математической культуры учащихся этих учебных заведений.

Настоящее пособие предназначено для кружковой работы по математике в средних специальных учебных заведениях (техникумах). Стараясь передать читателю свой многолетний опыт организации кружковых занятий, автор разбил предлагаемый материал на отдельные порции, применительно к рекомендуемой системе проведения занятий.

Предполагается, что в течение трех лет будет проведено 48 семинарских занятий (два занятия в месяц в течение 8 месяцев в году по четыре часа на каждом занятии), на каждом из которых под руководством преподавателя участники кружка решают по пять задач, а затем дается задание на дом, состоящее из 10 задач, тематически связанных с уже рассмотренными пятью. Если же руководитель кружка считает, что целесообразно (в данных конкретных условиях) проводить кружковые занятия еженедельно, то без большого труда можно разделить материал на две примерно равные части, сохраняя при этом число задач, отведенных на месяц.

Кроме основных семинарских занятий, целесообразно в течение учебного года провести несколько дополнитель-

ных занятий для разбора тех задач, которые учащиеся не смогли решить самостоятельно.

Для облегчения пользования данным пособием в книге приводятся решения всех задач, нумерация задач дается сквозная.

Задачи каждого семинара и соответствующего домашнего задания взяты из различных разделов математики с целью приучить участников кружка к умению применять свои знания в многообразных ситуациях.

Для экономии времени, отведенного для проведения кружковых занятий, рекомендуется заранее (силами кружковцев) размножить условия задач по числу участников кружка.

Кроме прямого назначения книги, как пособия для кружковой работы в техникумах, она может быть полезной для подготовки к конкурсным экзаменам в такие вузы, где предъявляются повышенные требования по математике, а также для тех, кто желает самостоятельно повысить свое математическое образование.

Автор выражает свою искреннюю признательность лауреату Ленинской премии, доктору физико-математических наук, профессору В. Г. Болтянскому, доценту Р. С. Гутеру и Н. С. Ермонскому, критические замечания и ценные советы которых способствовали улучшению книги.

Заслуженный учитель
школы РСФСР *И. Х. Сивашинский*

ЗАДАЧИ

Семинар 1

1. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем 20-копеечных монет было больше, чем 15-копеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

2. Доказать равенство

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$$
$$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

3. Показать, что уравнение $(x-3)^4+(x-2)^4-(2x-5)^4=0$ имеет только два действительных корня. Найти эти корни.

4. Доказать, что при любом целом n выражение $2n^3+3n^2+7n$ делится на 6.

5. Вокруг круга радиуса 1 описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

Задание 1

6. Школьник истратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 руб. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы 12 руб. Сколько стоит покупка и что дороже: портфель или авторучка?

7. Имеется 10 мешочков монет. В девяти мешочках монеты настоящие (весят по 10 *г*), а в одном мешочке все монеты фальшивые (весят по 11 *г*). Одним взвешиванием определить, в каком мешке фальшивые монеты.

8. Доказать, что

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

9. Доказать равенство

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=\frac{(\sqrt[4]{3}-1)\cdot\sqrt[4]{27}}{6}.$$

10. Найти действительные корни уравнения

$$(x-3)^4+(x-2)^4=17.$$

11. Найти все корни уравнения

$$x^4+x^3-10x^2+x+1=0.$$

12. Доказать, что если $a+b+c$ делится на 6, то и $a^3+b^3+c^3$ делится на 6.

13. Доказать, что при любом целом n выражение $n^4+3n^3-n^2-3n$ делится на 6.

14. Прямая, параллельная основанию треугольника, площадь которого равна S, отсекает от него треугольник с площадью, равной Q. Определить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

15. Дано, что медианы m_a и m_c треугольника ABC образуют со стороной AC углы, дающие в сумме 60°, и что произведение $m_a \cdot m_c = \sqrt{3}$. Найти площадь треугольника.

Семинар 2

16. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

17. Доказать равенство

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

18. Решить уравнение

$$(a+b+x)^3 - 4(a^3+b^3+x^3) - 12abx = 0.$$

19. Доказать, что число $N = 4a^2+3a+5$, где a — целое число, делится на 6 в том и только в том случае, когда a не делится ни на 2 ни на 3.

20. В остроугольном треугольнике две высоты равны 3 *см* и $2\sqrt{2}$ *см*, а их точка пересечения делит третью высоту в отношении 5 : 1, считая от вершины треугольника. Найти площадь треугольника.

Задание 2

21. Определить, через сколько минут после того, как часы показывали 9 часов, минутная стрелка догонит часовую.

22. Собака, находясь в точке A, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 *м* от собаки в точке B. Скачок собаки равен 2 *м*, скачок лисицы — 1 *м*. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от A собака догонит лисицу?

23. Доказать равенство

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$$

24. Доказать равенство

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$$

25. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{x^2+2mx-m^2}-\sqrt{x^2-2mx-m^2}=1,$$

где $m>0$.

26. Решить уравнение $|x|+|x-1|+|x-2|=a$.

27. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

28. Доказать, что $43^{43}-17^{17}$ делится на 10.

29. Через точку R, взятую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные соответственно сторонам треугольника; площади получившихся трех треугольников равны a^2, b^2, c^2. Найти площадь треугольника ABC.

30. Дан ромб с углом в 30°, бóльшая диагональ которого равна a. В этот ромб вписан прямоугольник так, что одна из его диагоналей есть меньшая диагональ ромба. Определить площадь прямоугольника.

Семинар 3

31. Прирост урожая по сравнению с предыдущим годом составил за первый год $a\%$, за второй год $b\%$. Какой должен быть процент прироста урожая за третий год, чтобы средний годовой прирост урожая за три года составлял $c\%$?

32. Доказать тождество

$$\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

33. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=3.$$

34. Доказать, что при любом целом n выражение $n^4+2n^3+3n^2+2n$ делится на 8.

35. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, O — точка пересечения диагоналей. Найти площадь трапеции, если площади треугольников AOD и BOC равны соответственно p^2 и q^2.

Задание 3

36. Найти вес и пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3 *кг* чистого серебра, получат сплав 900-й пробы, а сплавив его с 2 *кг* сплава 900-й пробы, получат сплав 840-й пробы.

37. Два одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из первого сосуда отлили a *л* спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили a *л* и налили столько же литров воды. Из второго сосуда отлили $2a$ *л* спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили $2a$ *л* и налили столько же литров воды. Определить, какую часть объема сосуда составляют a *л*, если крепость окончательной смеси в первом сосуде в $\frac{25}{16}$ раза больше крепости окончательной смеси во втором сосуде.

38. Доказать, что из равенства $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ следует, что

$$\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 2, \text{ где } a \neq b \neq c,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0.$$

39. Доказать, что если $b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$, то число $\frac{b}{2}$ есть среднее геометрическое чисел $a - \frac{b}{2}$ и $c - \frac{b}{2}$.

40. Найти действительные корни уравнения

$$2x - 4\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} = 15.$$

41. Решить уравнение $x^4 - 22x^2 - 5x + 2 = 0$.

42. Доказать, что при любом целом n выражение $25n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ делится на 24.

43. Доказать, что при любом целом n выражение $n^5 - n$ делится на 10.

44. Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанного круга равен r, а радиус вневписанного круга, касающегося гипотенузы, равен R.

45. Дан квадрат со стороной, равной a; если на двух противоположных сторонах этого квадрата построить

внутри него два правильных треугольника, то боковые стороны треугольников пересекутся и образуют четырехугольник. Определить площадь этого четырехугольника.

Семинар 4

46. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но что ни у одного из нас нет волос того цвета, на который указывает его фамилия», заметил черноволосый. «Ты прав», сказал Белов. Каков цвет волос художника?

47. Доказать, что если $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$, то $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$.

48. Найти все корни уравнения

$$x^4-x^3-10x^2+2x+4=0.$$

49. Доказать, что ни при каком натуральном n число $N=n^2+3n+5$ не делится на 121.

50. В окружность диаметра d вписан правильный пятиугольник. Найти площадь треугольника, сторонами которого являются две диагонали и сторона пятиугольника.

Задание 4

51. На острове живут два племени: молодцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил туземца, спросил его, кто он такой, и, когда услышал, что он из племени молодцов, нанял его в услужение. Они пошли и увидели вдали другого туземца, и путешественник послал своего слугу спросить его, к какому племени он принадлежит. Слуга вернулся и сказал, что тот утверждает, что он из племени молодцов. Спрашивается, был ли слуга молодцом или же лгуном.

52. Каждый из пяти друзей имеет по одному сыну. Каждый сын одолжил книгу у одного из друзей своего отца. Все эти друзья имеют фамилии, обозначающие профессию, однако ни у кого фамилия не совпадает с его профессией. Сын кузнеца взял книгу Кузнецова; он же тезка профессии сына Кузнецова и одновременно того, чью книгу взял сын Кузнецова. Известно, что фамилия

плотника не Столяров, и что плотник взял книгу Шорникова. Какова фамилия трубочиста? (Согласно старой традиции, сын наследует профессию своего отца.)

53. Доказать, что если $b=\frac{2ac}{a+c}$, то число $\frac{a+c}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{a+b}{c}$.

54. Доказать, что $b^2>ac$, если b есть среднее арифметическое чисел a и c; $b^2<ac$, если b есть среднее гармоническое чисел a и c (a, b, c — различные положительные числа).

55. Решить уравнение

$$x^4+\frac{1}{4}=x\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^4-\frac{1}{4}}.$$

56. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1.$$

57. Доказать, что необходимое и достаточное условие делимости на 7 тех трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 7, состоит в одинаковости цифр десятков и единиц.

58. Доказать, что из всех трехзначных чисел только числа 550 и 803 обладают тем свойством, что частное от деления числа на 11 равно сумме квадратов его цифр.

59. Три окружности радиусов r, r_1 и R касаются попарно внешним образом. Найти длину хорды, отсекаемой третьей окружностью от общей внутренней касательной первых двух окружностей.

60. Круга радиуса r касаются внешним образом три одинаковых окружности, касающиеся, кроме того, попарно между собой. Найти площади трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

Семинар 5

61. Плоты шли из пункта A до устья реки вниз по течению. В устье реки их взял на буксир пароход и через $11\frac{1}{2}$ суток после выхода плотов из пункта A доставил по озеру в пункт B. Сколько времени пароход вел плоты от устья реки по озеру до B, если известно, что пароход

тратит на рейс (без буксировки) от A до B 40 *ч* и от B до A 48 *ч*, а скорость во время буксировки уменьшается вдвое.

62. Доказать, что если $\frac{1}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$, то число $\frac{1}{a-c}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a-b}$, а также число $\frac{1}{c-a}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{c-b}$.

63. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)^2} + \sqrt[3]{x^2-a^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

64. Доказать, что произведение любых четырех последовательных целых чисел, увеличенное на единицу, есть полный квадрат некоторого числа.

65. К двум касающимся извне в точке A окружностям, радиусы которых 3 и 1, проведена общая внешняя касательная BC. Найти площадь фигуры ABC, ограниченной окружностями и касательной.

Задание 5

66. Из пункта A в пункт B одновременно отправляются пешеход и велосипедист. Доехав до B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 1 *ч* после начала движения. После встречи пешеход продолжает идти в B, а велосипедист поворачивает и тоже едет в B. Доехав до B, велосипедист снова поворачивает обратно и встречает пешехода через 40 *мин* после первой встречи. Определить, за какое время пешеход пройдет расстояние от A до B.

67. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход покрывает в полтора раза быстрее, чем катер, при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 *км*. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

68. Доказать, что если a есть среднее арифметическое чисел b и c; b — среднее геометрическое чисел a и c, то

c есть среднее гармоническое чисел a и b, т. е. $c=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

69. Доказать, что если $\dfrac{1}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{c}$, то число $\dfrac{c+a-b}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{b+c-a}{a}$ и $\dfrac{a+b-c}{c}$.

70. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$$

71. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5.$$

72. Доказать, что выражение $n^5-5n^4+25n^3+5n^2-26n$ при любом целом неотрицательном n делится на 120.

73. Доказать, что если целые числа a, b, c связаны равенством $a^2+b^2=c^2$, то произведение abc делится на 60.

74. В треугольнике даны две стороны a и b и известно, что сумма высот, опущенных на эти стороны, равна третьей высоте. Определить третью сторону треугольника. Найти условие возможности задачи.

75. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Найти отношение катетов прямоугольного треугольника.

Семинар 6

76. В реку впадает приток. На притоке на некотором расстоянии от его устья расположен пункт A. На реке на таком же расстоянии от устья притока расположен пункт B. Время, которое требуется моторной лодке, чтобы доплыть от пункта A до устья притока и обратно, относится ко времени, которое требуется ей, чтобы доплыть от пункта B до устья притока и обратно, как 32 : 35. Если бы скорость моторной лодки была на 2 *км/ч* больше, то это отношение было бы равно 15 : 16, а если бы скорость моторной лодки была на 2 *км/ч* меньше, то это отношение было бы равно 7 : 8. Найти скорость течения реки. (Рас-

стояние измеряется вдоль притока и реки соответственно.)

77. Доказать, что если $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$, где a, b, c отличны от нуля, то имеют место равенства

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

78. Решить уравнение $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$.

79. Доказать, что если a и b — нечетные числа, то число $N=ab(a^4-b^4)$ делится на 240.

80. Биссектриса внутреннего угла B треугольника ABC равна l, а биссектриса смежного с ним угла равна l_1. Найти площадь треугольника, если $AB:BC=k$.

Задание 6

81. Два туриста вышли из A в B одновременно, причем первый турист каждый километр пути проходит на 5 *мин* быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 *мин*, снова пошел в B. При этом в B оба туриста пришли одновременно. Каково расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 *ч*?

82. Катер и пароход, отправляясь одновременно из пункта A в пункт B по направлению течения реки, осуществляют безостановочное движение между A и B. За один рабочий день катер делает 5 рейсов, а пароход 9 рейсов. (Рейс — движение от A до B и обратно.) Через 20 *мин* после начала движения, когда катер прошел 5/6 расстояния от A до B, происходит их первая встреча. Определить продолжительность рабочего дня.

83. Доказать, что из равенства $ad=bc$ следует, что

$$\frac{a^4-b^4}{(a-b)^4}=\frac{c^4-d^4}{(c-d)^4},\text{ где } b\neq 0,\ d\neq 0,\ a\neq b,\ c\neq d.$$

84. Доказать, что из равенств $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, где a, b, c отличны от нуля, следует равенство

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}.$$

85. Найти действительные корни уравнения

$$\frac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}=\frac{a^2}{x^2}.$$

86. Решить уравнение

$$x^2-10x+2xy-y+y^2=0$$

в целых числах.

87. Доказать, что при любых целых значениях a и b число $N=(a^2b^3-4a^2b)(a^4+a^2-2)$ делится на 216.

88. Некоторое число является точным квадратом. Доказать, что сумма его цифр либо делится на 9, либо при делении на 3 дает в остатке 1.

89. Меньшее основание трапеции $DC=b$, большее основание трапеции $AB=a$. На продолжении меньшего основания определить точку M такую, чтобы прямая AM разделила трапецию на две равновеликие части.

90. В равносторонний треугольник, сторона которого равна 3, вписан другой равносторонний треугольник, втрое меньший первого по площади. Найти расстояние между двумя смежными вершинами этих треугольников.

Семинар 7

91. Из пункта A в пункт B против течения реки отправляется пароход. Одновременно из B в A отправляется лодка и, пройдя 3/8 всего расстояния от B до A встречается с пароходом. В пункте B пароход мгновенно поворачивает обратно и прибывает в A одновременно с лодкой. Если бы скорость лодки относительно воды была в два раза больше, то в пункт A она прибыла бы на 1 *ч* 10 *мин* раньше парохода. Определить, через какое время после отправления пароход возвратился в пункт A.

92. Доказать, что если

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)},$$

то произведение $(x+1)(y+1)=2$.

93. Найти действительные корни уравнения

$$4x^2-4x-4\sqrt{y}+y+5=0.$$

94. Доказать, что из всех двузначных чисел имеется только пять, которые делятся на произведение своих цифр. Найти эти числа.

95. Вычислить стороны AB и AC треугольника ABC зная, что сторона $BC=a$, сумма $AB+AC=k$, и если известно, что биссектриса угла B пересекает противолежащую сторону AC в такой точке D, что $BD=DC$.

Задание 7

96. Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 *ч* быстрее товарного. Если бы каждый поезд шел то время, которое тратит другой поезд на путь от A до B, то пассажирский поезд прошел бы на 280 *км* больше, чем товарный. Если бы скорость каждого поезда была увеличена на 10 *км/ч*, то пассажирский поезд прошел расстояние AB на 2 *ч* 24 *мин* быстрее товарного. Найти расстояние между городами A и B.

97. Из города A в город B через равные промежутки времени и с равной скоростью выезжает 21 автобус, каждый из которых проходит путь AB за 2 *ч* 40 *мин*. При этом первый автобус прибывает в город B в тот момент, когда из города A выезжает 21-й автобус. Прибыв в город B, каждый автобус мгновенно поворачивает обратно и двигается к городу A. Из города A одновременно с 21-м автобусом выезжает в город B легковая машина, которая через t *мин* обгоняет 20-й автобус. Найти t и время, за которое легковая машина преодолевает расстояние AB, если, встретив 1-й автобус, она встречает 2-й автобус через (t—9) *мин*. (Автобусы занумерованы в том порядке, в каком они выезжают из города A.)

98. Доказать, что если $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, то

$$b^2(a-c)^2=2\left[c^2(b-a)^2+a^2(c-b)^2\right].$$

99. Доказать, что из пропорции $\frac{a^2+b^2}{a+c}=\frac{a^2-b^2}{a-c}$ следуют равенства

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \text{ и } a-2b+c=\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{(b-c)^2}{c}.$$

100. Найти действительные решения уравнения

$$2\sqrt{2}\,(x+2y) = x^2+y^2+10.$$

101. Решить уравнение

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = a(a-1).$$

102. Доказать, что целое число $N=x^2+3x+1$ делится на 55 лишь при $x=55t+6$ или при $x=55t-9$, где t — любое целое число.

103. Доказать, что число $70a+21b+15c-N$ делится на 105, если a, b, c — остатки от деления числа N соответственно на 3, 5 и 7.

104. Основания равнобочной трапеции равны a и b $(a>b)$. Отрезки, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

105. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AB=3$ *см*, катет $AC=6$ *см*. Центры окружностей радиусов 1 *см*, 2 *см*, 3 *см* находятся соответственно в точках A, B, C. Найти радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.

Семинар 8

106. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 часов утра из A в B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 *ч*. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город к 9 часам вечера того же дня?

107. Доказать, что если $b=\frac{a+c}{2}$, $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, $b^2\beta^2 = ac\alpha\gamma$, то $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$.

108. Решить уравнение

$$\frac{x^2-6x-9}{x} = \frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}.$$

109. Доказать, что $11^{10}-1$ делится на 100.

110. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 *см* и 8 *см*. На всех сторонах этого прямоугольного треугольника, как на диаметрах, построены полуокружности, лежащие вне треугольника. Найти радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей.

Задание 8

111. Два автобуса выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются в 12 часов дня. Если скорость первого автобуса увеличить в 2 раза, а скорость второго оставить прежней, то встреча произойдет на 56 *мин* раньше. Если же увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 *мин* раньше. Определить время встречи, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов.

112. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно выходят навстречу друг другу две лодки, которые встречаются посредине между городами A и B. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 *км* от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B, поплыли обе против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B в 150 *км* от B. Найти расстояние между городами A и B.

113. Доказать, что если $ax+by+cz=0$, то

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}=\frac{1}{a+b+c}.$$

114. Доказать, что если $b=\frac{a+c}{2}$, $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ и $\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\gamma}=\frac{a^2+c^2}{ac}$, то $b^2\beta^2=a\alpha c\gamma$.

115. Для каждого действительного a решить уравнение $x^2+|x|+a=0$ (найти только действительные корни).

116. Для каждого действительного a решить уравнение

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}}-\sqrt[4]{\frac{1+x}{a-x}}=2.$$

117. Доказать, что $2^{55}+1$ делится на 33.

118. Доказать, что число $N=2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

119. Дана окружность радиуса R, касательная к ней T и треугольник ABC, сторона которого $BC=a$ находится на касательной T, а вершина A расположена по ту же сторону от этой касательной, что и окружность. Кроме того, высота AH треугольника равна диаметру $2R$ окружности. Параллельно касательной T проведена прямая l, которая пересекает окружность в точках M и N, а стороны AB и AC в точках P и Q. На каком расстоянии x от T следует провести прямую l для того, чтобы отношение $\frac{MN}{PQ}=k$, где k — данное число?

120. В окружность радиуса 1 вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в два раза больше основания. В этот треугольник вписана окружность. Найти ее радиус.

Семинар 9

121. Доказать, что из каждых шести человек всегда имеется либо три человека, которые все знакомы друг с другом, либо три человека, никакие два из которых не знакомы между собой.

122. Доказать, что если $\frac{3x+2y}{3a-2b}=\frac{3y+2z}{3b-2c}=\frac{3z+2x}{3c-2a}$, то $5(x+y+z)(5c+4b-3a)=(9x+8y+13z)(a+b+c)$.

123. Решить уравнение $(x+1)(|x|-1)=-\frac{1}{2}$.

124. Доказать, что число $N=3^{105}+4^{105}$ делится на 13, 49, 181 и 379.

125. Около треугольника ABC описана окружность и к ней в точке A проведена касательная, пересекающаяся с продолжением BC в точке T. Выразить AT и BT через стороны a, b и c треугольника.

Задание 9

126. Две группы туристов отправились одновременно на байдарках по реке навстречу друг другу: первая из пункта A против течения, вторая — из пункта B по течению. Первая группа, встретившись со второй в пункте C, повернула назад. Дальнейший путь обе группы

проделали вместе, плывя со скоростью второй группы. Через 1,5 *ч* после отправления обе группы прибыли в пункт D, который отстоит от пункта B на расстоянии 15 *км*. Если бы первая группа отправилась в путь на 1 *ч* раньше второй, то встреча произошла бы посредине между пунктами A и B. Найти скорости первой и второй группы относительно берегов и расстояние от пункта C до пункта A, если расстояние между пунктами A и B равно 20 *км*.

127. Доказать, что при делении двух целых чисел на их разность получаются равные остатки, а частные отличаются на 1.

128. Доказать, что если число a есть среднее арифметическое чисел b и c, а число c есть среднее гармоническое чисел a и b, то число b является средним геометрическим чисел a и c. Также доказать, что из условия задачи следует, что или $a:b:c=1:1:1$, или $a:b:c=1:-2:4$.

129. Доказать, что если число b есть среднее арифметическое чисел a и c; число c — среднее геометрическое чисел b и d, а число d — среднее гармоническое чисел c и e, то число c является средним геометрическим чисел a и e.

130. Для каждого действительного a решить уравнение $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$ (найти лишь действительные корни).

131. Решить уравнение $x^3-4x^2+3x+2(x-1)\cdot\sqrt{x}=0$.

132. Доказать, что число $43^{23}+23^{43}$ делится на 66.

133. Доказать, что выражение $3^n\,(13^n-10^n-6^n)+65^n$ при n, равном нулю или любому нечетному числу, делится на 56.

134. Выразить через стороны a, b, c треугольника ABC отрезки, соединяющие точки, в которых стороны треугольника касаются вписанной в него окружности.

135. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в меньшую из этих частей.

Семинар 10

136. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

137. Доказать, что если

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=0, \text{ где } ab\neq -1,$$

$$bc\neq -1,\ ca\neq -1,$$

то числа a, b, c не могут быть все различными.

138. Решить уравнение

$$8\sqrt[3]{x+1}=\frac{32x+31}{2x+3\sqrt[3]{x+1}+1}.$$

139. Доказать, что выражение $n(n^2+5^n)$ делится на 6 при любом нечетном положительном n (а также при $n=0$).

140. Одной и той же прямой касаются две окружности, радиусы которых соответственно равны 3 *м* и 12 *м*, а расстояние между центрами которых равно 41 *м*. Эти окружности одновременно начинают катиться по общей касательной навстречу друг другу с одинаковой скоростью 1 *м/мин*. Через сколько минут окружности прикоснутся друг к другу?

Задание 10

141. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144, \\ x^2+4x+5y=24. \end{cases}$$

142. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x^2y+2xy^2+y^3=9. \end{cases}$$

143. Доказать, что если $ad-bc=1$, то $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1$, где a, b, c, d — действительные числа.

144. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=0$, $a+b+c=0$, $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0$, то

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2=0.$$

145. Число $1+\sqrt{2}$ является корнем уравнения

$$x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0.$$

Найти все остальные корни этого уравнения, если известно, что a и b рациональные числа.

146. Доказать, что для того, чтобы уравнение $ax^2+bx+c=0$ имело действительные корни, достаточно, чтобы имело место неравенство $c(a+b+c)<0$.

147. Доказать, что выражение $35^n-2\cdot 5^n+11^n$ делится на 6 при любом целом неотрицательном n.

148. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $N=3^{2n+2}-2^{2n+1}$ делится на 7.

149. Дана полуокружность диаметра $AB=2R$. Через точку C диаметра AB проведен перпендикуляр, пересекающий полуокружность в точке D. Касательная, проведенная в точке D, пересекает AB в точке E. Определить точку C таким образом, чтобы имело место равенство $DE=CD+CB$.

150. Найти стороны равнобедренного треугольника, если радиус r вписанного круга равен 3, а радиус R описанного круга равен 8.

Семинар 11

151. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ y+z-x=3. \end{cases}$$

152. Доказать, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

153. Доказать, что уравнение $x^3-px+1=0$ при p целом и большем 2 не имеет рациональных корней.

154. Доказать, что выражение $2^{2n+1}+14^n+5^n$ делится на 9 при любом нечетном n.

155. В точке A плоскости P расположен источник света. Над плоскостью помещено полусферическое зеркало радиуса 1, обращенное внутренней зеркальной поверхностью к плоскости, причем так, что ось симметрии зеркала перпендикулярна к плоскости P в точке A. Зная, что наименьший угол между лучами, отраженными зеркалом и плоскостью P, равен 15°, определить расстояние от зеркала до плоскости и радиус освещенного на плоскости P круга.

Задание 11

156. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 84, \\ x + \sqrt{xy} + y = 14. \end{cases}$$

157. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4\sqrt{a}, \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = (\sqrt{41} - 3)\, a. \end{cases}$$

158. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4).$$

159. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$2(a^5+b^5+c^5) = 5abc(a^2+b^2+c^2).$$

160. Найти уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень $x_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

161. Показать, что уравнение

$$2x^4+3x^3+8x^2+6x+5=0$$

не имеет действительных корней.

162. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $N = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ делится на 11.

163. Найти все натуральные числа n, для которых натуральное число $N = n^2 + n + 1$ делится на 13.

164. Доказать, что если произведение площадей треугольников, на которые четырехугольник разбивается одной из своих диагоналей, равно произведению площадей треугольников, на которые он разбивается другой диагональю, то четырехугольник — трапеция (или, в частности, параллелограмм).

165. Даны две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy и на Oy взяты две точки A и B так, что $OA = a$, $AB = b$. В точке M на оси Ox проведен к Ox перпендикуляр $MP = h$. Определить $OM = x$ так, чтобы из точки P были видны отрезки OA и AB под равными углами.

Семинар 12

166. Найти действительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{17}=0, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6. \end{cases}$$

167. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5).$$

168. Показать, что уравнение $2x^4-x^3+3x^2-x+1=0$ не имеет действительных корней.

169. Доказать, что при любом целом неотрицательном n выражение $3^n\cdot 5^{n+1}+2^{n+3}$ делится на 13.

170. Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO=MO\cdot\sqrt{3}$, $NO=BO\cdot(\sqrt{3}-1)$. Найти углы треугольника.

Задание 12

171. Найти все действительные значения x, при которых одновременно выполняются уравнения $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$ и $\sqrt{x^2}=x$.

172. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a, \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a^2 \quad (a>0). \end{cases}$$

173. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

174. Доказать, что если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, то имеет место равенство

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

175. Доказать, что уравнение $3x^2-4y^2=13$ не имеет решений в целых числах.

176. Доказать, что уравнение $x^2+4x-8y=11$ не имеет решений в целых числах.

177. Доказать, что при любом положительном нечетном n выражение $7^n(7^n+1)+2\cdot(9^n-21^n)$ делится на 16.

178. Доказать, что при любом целом неотрицательном n выражение $9^{n+1}+8n-9$ делится на 16.

179. Доказать, что точка пересечения биссектрисы угла B треугольника ABC и перпендикуляра, проведенного к стороне AC через ее середину, равноудалена от концов этой стороны и от центра вписанного круга.

180. Пусть точка O — ортоцентр треугольника ABC. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AOB, AOC, BOC, равны между собой.

Семинар 13

181. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6y+8\sqrt{x^2-6y+1}=x^2+17, \\ \dfrac{x^2y-5}{49}=\dfrac{2}{y}-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

182. Доказать, что если

$$a^3+pa+q=0,\ b^3+pb+q=0 \text{ и } c^3+pc+q=0$$

$$(a\neq b,\ a\neq c,\ b\neq c),$$

то $a+b+c=0$.

183. Доказать, что если между коэффициентами p и q уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$ (p, q и r — действительные числа) имеет место зависимость $p^2<3q$, то это уравнение имеет единственный действительный корень.

184. Доказать, что при любом целом $n\geqslant -1$ число $N=3^{4n+4}-4^{3n+3}$ делится на 17.

185. Вершины A, B, C треугольника ABC соединены отрезками с точками A_1, B_1, C_1, расположенными на противоположных сторонах треугольника (но не в вершинах). Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

Задание 13

186. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y+\dfrac{2\sqrt{x^2-12y+1}}{3}=\dfrac{x^2+17}{12}, \\ \dfrac{x}{8y}+\dfrac{2}{3}=\sqrt{\dfrac{x}{3y}+\dfrac{1}{4}}-\dfrac{y}{2x}. \end{cases}$$

187. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1-16y^2}-\sqrt{1-16x^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=\dfrac{1}{5}, \end{cases}$$

где радикалы — арифметические корни.

188. Доказать, что если $A=\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, то $B=\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$ (a, b, c — различные числа). Также доказать, что если $B=0$, то $A=0$.

189. Доказать, что если $ax+cy+bz=0$, $cx+by+az=0$ и $bx+ay+cz=0$, то имеет место равенство $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

190. Доказать, что для того, чтобы оба корня уравнения $(1-a^2)x^2+2ax-1=0$ принадлежали интервалу $(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы было $a>2$.

191. Доказать, что если p и q нечетные числа, то уравнение $x^{10}+px^9+q=0$ не имеет целых решений.

192. Доказать, что число $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ при любом натуральном n делится на 19.

193. Доказать, что при любом целом неотрицательном n выражение $7^{n+2}+27^{2n+1}$ делится на 19.

194. Доказать, что если сумма углов при основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины ее оснований, равен полуразности оснований.

195. Доказать, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырехугольника равна его полупериметру, то четырехугольник — параллелограмм.

Семинар 14

196. При каких значениях параметра k уравнения $2x^2-(3k+2)x+12=0$, $4x^2-(9k-2)x+36=0$ имеют общий корень?

197. Доказать, что из равенства $a^2+b^2+c^2=ac+bc+ab$, где a, b, c — действительные числа, следует, что $a=b=c$.

198. Доказать, что уравнение $\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}=c$ имеет единственный корень только при $c^2=2(a+b)$.

199. Доказать, что при любых нечетных значениях n число $N=2^{4n+1}-3\cdot 7^n+5^{n+1}\cdot 6^n$ делится на 23.

200. Доказать, что если хотя бы один из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, делит его на равновеликие части, то четырехугольник является или параллелограммом или трапецией.

Задание 14

201. Даны два уравнения

$$x^2-ax+1=0,\quad x^2-x+a=0.$$

Определить все значения коэффициента a, при которых эти уравнения имеют хотя бы один общий корень.

202. Доказать, что для того, чтобы уравнения

$$a_1x+b_1=0 \text{ и } a_2x+b_2=0,$$

где $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, имели общий корень, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

203. Доказать, что если $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, то

$$(a+b+c)^3=27abc.$$

204. Доказать, что если $ax^3=by^3=cz^3$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, то $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

205. Доказать, что уравнения $ax^3-x^2-x-(a+1)=0$ и $ax^2-x-(a+1)=0$, где $a\neq 0$, имеют лишь один общий корень, равный $\frac{a+1}{a}$.

206. Доказать, что квадратное уравнение

$$a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$$

не может иметь действительных корней, если $a+b>c$ и $|a-b|<c$.

207. Доказать, что $5^{2n+1}+2^{n+1}+25^{n+4}$ делится при любом целом неотрицательном n на 23.

208. Доказать, что при любом целом неотрицательном n выражение $3^{6n}+7^n(7^n-2^{n+1})$ делится на 25.

209. Доказать, что если площади двух прямоугольных треугольников относятся как квадраты их гипотенуз, то треугольники подобны.

210. Вершина A прямого угла треугольника ABC соединена отрезком с центром O квадрата, построенного на гипотенузе (треугольник расположен вне квадрата). Доказать, что $AB \cdot DC = AC \cdot BD$, где D — точка пересечения BC и AO.

Семинар 15

211. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} xz = 2yt, \\ x^2 - 2y^2 = 6t^2 - 3z^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение в целых числах $x=y=z=t=0$.

212. Доказать, что если $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$, где a, b и c — рациональные числа, то $a=b=c=0$.

213. Доказать, что уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$ имеет ровно пять действительных корней. Найти эти корни.

214. Доказать, что при любом натуральном n число $N=5\cdot 7^{2(n+1)}+2^{3n}$ делится на 41.

215. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины, если биссектриса, медиана и высота не сливаются.

Задание 15

216. Доказать, что для того, чтобы система уравнений

$$x+y+z=a, \quad x^2+y^2+z^2=b^2, \quad xy=z^2$$

имела положительные и различные решения, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение $|b|<a<|b|\sqrt{3}$.

217. Доказать, что если система уравнений $a(x^2+y^2)+x+y-b=0$, $x-y+b=0$ имеет действительные решения при любом значении b, то $a=0$.

218. Доказать, что если $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$, то

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=$$
$$=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}.$$

219. Доказать, что если

$$\frac{y+z}{3b-c}=\frac{z+x}{3c-a}=\frac{x+y}{3a-b},$$

то

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}.$$

220. Доказать, что все три корня уравнения $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-b-c+a}=0$, где a, b, c — действительные числа, являются действительными.

221. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y+|x|=2, \\ y-|x-1|=1. \end{cases}$$

222. Доказать, что выражение $7^{2n+1}+40\cdot 2^n$ при любом целом неотрицательном n делится на 47.

223. Доказать, что при любом натуральном n число $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

224. На стороне треугольника или на ее продолжении взята точка, из которой на две другие стороны опущены перпендикуляры. Доказать, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров будет наименьшим, если взятая точка есть основание высоты треугольника.

225. На медиане CC_1 треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые, параллельные сторонам CA и CB. Доказать, что если отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой, то треугольник равнобедренный.

Семинар 16

226. Доказать, что система уравнений

$$\frac{x+y}{z^2}=2,\quad \frac{x+z}{y^2}=2,\quad \frac{y+z}{x^2}=2$$

имеет единственное действительное решение $x=y=z=1$.

227. Доказать, что если

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c},$$

то

$$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{x-z}=\frac{c}{x-2y+z}.$$

228. Найти все значения k, при которых уравнение $x^2-2\sqrt{2}x+k+1=0$ имеет действительные и различные корни. Также определить, сколько корней этого уравнения находится в интервале $(0, \sqrt{2})$ в зависимости от k.

229. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $N=11^{6n+3}+1$ делится на 148.

230. Доказать, что в любом пятиугольнике хотя бы одна сторона не параллельна ни одной из двух не соседних с нею сторон.

Задание 16

231. Найти все действительные значения k, при которых решение системы $x-2y=k$, $3x+y=8$ удовлетворяет условию $x>\frac{1}{k}$, $y>0$.

232. Доказать, что лишь при $a=1$ и $b=2$ уравнения $x^3+ax^2+18=0$, $x^3+bx+12=0$ (a и b — действительные числа) имеют два общих корня.

233. Доказать, что если

$$\frac{y+z}{pb+qc}=\frac{z+x}{pc+qa}=\frac{x+y}{pa+qb},$$

то

$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab}.$$

234. Доказать, что если

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)},$$

где x, y, z отличны от нуля и попарно различные числа, то

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

235. Доказать, что при любых действительных значениях a, p, q уравнение $\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=\frac{1}{a^2}$ имеет действительные и различные корни.

236. Найти все действительные значения a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ действительны и оба корня больше a.

237. Доказать, что при любом натуральном n число $N=7^{2n}-2^{4n}+231$ делится на 264.

238. Доказать, что число $7^{21}-487$ делится на 288.

239. Доказать, что в разностороннем остроугольном треугольнике ортоцентр расположен ближе к наименьшей из сторон, чем к двум другим сторонам.

240. Точка M равноудалена от параллельных прямых a и b. Стороны прямого угла с вершиной в точке M пересекают данные параллельные прямые в точках A и B. Доказать, что расстояние точки M до прямой AB не зависит от положения сторон прямого угла.

Семинар 17

241. Доказать, что равенство

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

242. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}.$$

243. Найти три натуральных числа a, b, c при условии, что число a не является точным квадратом и что существует острый угол α такой, что

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{a}+b}{c}, \quad \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{a}-b}{c}.$$

Вычислить также острый угол α.

244. Доказать неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

245. На сторонах треугольника ABC построены квадраты $ABDE$ и $BCGF$, примыкающие к нему извне. Доказать, что продолжение медианы BM треугольника DBF служит высотой в треугольнике ABC и наоборот.

Задание 17

246. Доказать, что если при любом значении x имеет место равенство

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \\ = (x-c)^2 \cdot \left(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-2} x^{n-2}\right),$$

то

$$a_1 + 2a_2 c + 3a_3 c^2 + \cdots + n a_n c^{n-1} = 0.$$

247. Доказать, что если a, b, c, d — попарно неравные вещественные числа и α, β, γ — решение системы уравнений

$$1 + x + y + z = 0, \quad a + bx + cy + dz = 0,$$

$$a^2 + b^2 x + c^2 y + d^2 z = 0,$$

то произведение $\alpha\beta\gamma$ положительно.

248. Решить уравнение $x^4-2x^3+4x^2-3x+2=0$.

249. Найти все три корня уравнения $2x^3-3x^2+3x-1=0$.

250. Доказать равенство

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

251. Доказать, что

$$\cos 86^\circ 15' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

252. Доказать неравенство

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n\left[2\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) - \right.$$
$$\left. - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \cdots + a_n a_1)\right].$$

253. Доказать, что если $a+b \geqslant 1$, то имеет место неравенство $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

254. Внутри равностороннего треугольника ABC расположена точка P. Прямая OP, проходящая через центр O треугольника, пересекает стороны AB, BC, CA (или их продолжения) треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что $\frac{A_1P}{A_1O} + \frac{B_1P}{B_1O} + \frac{C_1P}{C_1O} = 3$.

255. Известно, что если в четырехугольник можно вписать круг, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны между собой. Доказать обратное утверждение: если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой, то в этот четырехугольник можно вписать круг.

Семинар 18

256. Доказать, что $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

257. Решить уравнение $x^3 - x - \sqrt{2} = 0$.

258. Доказать равенство

$$\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{2}.$$

259. Доказать неравенство $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

260. Основания трапеции равны a и b. Отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям, делит площадь трапеции пополам. Доказать, что длина этого отрезка равна $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Задание 18

261. Доказать, что

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=n+$$
$$+\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\cdots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right).$$

262. Доказать, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right).$$

263. Найти все корни уравнения

$$x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11.$$

264. Найти все корни уравнения

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\left(x+\frac{3}{2}\right)^4=82.$$

265. Доказать равенство

$$(\operatorname{tg}7^\circ 30'+\operatorname{tg}37^\circ 30'+\operatorname{tg}67^\circ 30')(\operatorname{tg}22^\circ 30'+$$
$$+\operatorname{tg}52^\circ 30'+\operatorname{tg}82^\circ 30')=17+8\sqrt{3}.$$

266. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}50^\circ+\operatorname{tg}60^\circ=\frac{8\sqrt{3}\cdot\cos 20^\circ}{3}.$$

267. Доказать, что если $a\geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$a^3+2\geqslant a^2+2\sqrt{a}.$$

268. Доказать неравенство

$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc(a+b+c).$$

269. Доказать, что в квадрат нельзя вписать ромб, отличный от квадрата.

270. Доказать, что если между сторонами a, b, c треугольника существует зависимость $a^2=b^2+bc$, то углы A и B, противолежащие сторонам a и b, удовлетворяют равенству $A=2B$.

Семинар 19

271. Доказать, что если n — четное, то имеет место равенство

$$\frac{1}{1!\,(n-1)!}+\frac{1}{3!\,(n-3)!}+\frac{1}{5!\,(n-5)!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!\,1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}.$$

272. Решить уравнение

$$\frac{3x}{2x^2-4x+5}+\frac{2x}{2x^2-6x+5}=3.$$

273. Показать, что выражение $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}$, где $x\neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, представляется рационально через $\operatorname{tg} x$.

274. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $ay+bx>0$ и $x\neq y$, то имеет место неравенство

$$\frac{(a+b)\,xy}{ay+bx}<\frac{ax+by}{a+b}.$$

275. Доказать, что если в треугольник можно вписать два равных квадрата, но различных по положению, то такой треугольник равнобедренный.

Задание 19

276. Доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(1-\frac{1}{2a-1}\right)\left(1+\frac{1}{3a-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{(2n-1)\,a-1}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{2na-1}\right)=\frac{(n+1)\,a}{(n+1)\,a-1}\times$$
$$\times\frac{(n+2)\,a}{(n+2)\,a-1}\cdots\frac{(n+n)\,a}{(n+n)\,a-1}.$$

277. Доказать, что если a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то и $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

278. Решить уравнение $|z|-z=1+2i$.

279. Решить систему уравнений $x^3+y^3=8$, $x^2+y^2=4$.

280. Доказать, что если $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C$, то $A+B+C=n\cdot\pi$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

281. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

вычислить

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta).$$

282. Доказать неравенство

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geqslant 6abc.$$

283. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$6abc\leqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\leqslant 2(a^3+b^3+c^3).$$

284. Доказать, что квадрат биссектрисы угла треугольника равен разности между произведением прилежащих сторон и произведением отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону.

285. Доказать, что биссектриса l_A угла A треугольника ABC равна

$$\frac{2bc\cdot\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

где b и c — стороны треугольника, заключающие угол A.

Семинар 20

286. Доказать, что если последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1} ... составляет арифметическую прогрессию с разностью d, то последовательность S_1, S_2, S_3, ..., где

$$\begin{aligned}
S_1&=a_1+a_2+\cdots+a_n,\\
S_2&=a_{n+1}+\cdots+a_{2n},\\
S_3&=a_{2n+1}+\cdots+a_{3n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

также составляет арифметическую прогрессию, но с разностью n^2d.

287. Найти все решения системы уравнений

$$\frac{2x^2}{1+x^2}=y, \quad \frac{2y^2}{1+y^2}=x.$$

288. Доказать, что если $\cos\alpha+\cos\beta=a$ и $\sin\alpha+\sin\beta=b$, то

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \text{ и } \sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

289. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\geqslant 3.$$

290. Пусть O — центр круга, вписанного в треугольник ABC. Доказать, что имеет место равенство

$$AO^2\cdot BC+BO^2\cdot AC+CO^2\cdot AB=abc,$$

где a, b, c — стороны, противолежащие соответственно углам A, B, C.

Задание 20

291. Доказать, что если числа a, b, c суть соответственно p-й, q-й и r-й члены арифметической прогрессии, то имеет место равенство $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$.

292. Доказать, что если $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=S$ и $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=S_1$, где a_1, a_2, a_3, ..., a_n составляют геометрическую прогрессию, то произведение

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=\left(\frac{S}{S_1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

293. Найти все значения x и y (в том числе комплексные), такие, что числа x, $x+2y$, $2x+y$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $(y+1)^2$, $xy+5$, $(x+1)^2$ образуют геометрическую прогрессию.

294. Доказать, что действительный корень уравнения $x^5+x-10=0$ иррационален.

295. Доказать, что из равенств

$$\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi-\beta)}=\frac{a}{b} \text{ и } \frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos(\varphi-\beta)}=\frac{c}{d}$$

следует, что $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$.

296. Доказать, что если $m\cdot\operatorname{ctg}x=a$ и $n\cdot\operatorname{cosec}2x=b$, то имеет место соотношение

$$\frac{2am}{a^2+b^2}=\frac{n}{b}.$$

297. Доказать, что если $a>x>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{a-x}{a+x}<\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}.$$

298. Доказать, что если $abc>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{a^8+b^8+c^8}{a^6b^3c^3}.$$

299. Доказать, что если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AC и A_1C_1, углы B и B_1 и биссектрисы BP и B_1P_1 этих углов, то треугольники равны.

300. Одна из диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, является диаметром окружности. Доказать, что проекции противоположных сторон четырехугольника на вторую диагональ равны между собой.

Семинар 21

301. Доказать, что

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}},$$

где S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии, $S_n\neq0$, знаменатель прогрессии $q\neq0$.

302. Доказать, что уравнение $x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$ не имеет действительных корней.

303. Доказать, что если $x\cos\alpha+y\sin\beta=a$, $x\sin\beta-y\cos\alpha=b$ и $(x^2+y^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\beta)=2ab$, то $2(x^2+y^2)=(a+b)^2$.

304. Доказать, что если $ab>0$, то имеет место неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

305. Доказать, что прямые, соединяющие вершины параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной вершине, рассекают диагональ, соединяющую две другие вершины, на три равные части.

Задание 21

306. Ряд чисел 1, 4, 10, 19, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних чисел образуют арифметическую прогрессию. Найти n-й член и сумму первых n членов этого ряда.

307. Существует ли бесконечная геометрическая прогрессия с положительными членами, у которой первые n членов — целые числа, а остальные — дробные?

308. Доказать, что уравнение $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+n=0$, где n — простое, не имеет рациональных корней.

309. Доказать, что уравнение $x^3+ax^2-b=0$, где a и b действительные числа и $b>0$, имеет один и только один положительный корень.

310. Доказать, что если $\cos x+\cos 2x=\frac{y}{a}$ и $\sin x+\sin 2x=\frac{z}{b}$, то имеет место равенство

$$\frac{2y}{a}=\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-3\right).$$

311. Доказать, что если $\cos(\beta+\alpha)=m$ и $\cos(\beta-\alpha)=n$, то имеет место равенство $\cos 2\beta=mn\pm\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}$.

312. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $u>0$, то имеет место неравенство $au+\frac{b}{u}\geqslant 2\sqrt{ab}$.

313. Доказать, что если $x>0$, $y>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt[4]{xy}.$$

314. Внутри правильного треугольника ABC взята произвольная точка P, из которой опущены перпендику-

ляры PD, PE и PF соответственно на BC, CA и AB. Доказать, что имеет место соотношение

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

315. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущен на гипотенузу c перпендикуляр $CD=p$, а из полученной точки D опущены перпендикуляры DE и DF на катеты AC и BC. Обозначим отрезки AE через m, а BF через n. Доказать, что имеют место следующие зависимости:

1) $p^3=c\cdot m\cdot n$,

2) $m^2+n^2+3p^2=c^2$,

3) $\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}=\sqrt[3]{c^2}$.

Семинар 22

316. В арифметической прогрессии, состоящей из четырех целых чисел, наибольший член равен сумме квадратов остальных трех членов. Доказать, что условию удовлетворяют лишь числа 2, 1, 0, —1.

317. Найти такое значение m, при котором корни биквадратного уравнения $x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти эти корни.

318. Доказать, что из равенств $x=a\cdot\cos^3 t+3a\cdot\cos t\cdot\sin^2 t$, $y=a\cdot\sin^3 t+3a\cdot\cos^2 t\cdot\sin t$, где $a\neq 0$, следует, что

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{a}\right)^2}=2.$$

319. Доказать неравенство $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$.

320. Доказать, что если в четырехугольнике суммы квадратов противоположных сторон равны, то диагонали его взаимно перпендикулярны.

Задание 22

321. Из нечетных чисел составлены группы

$$(1),\ (3,\ 5),\ (7,\ 9,\ 11),\ \ldots,$$

так, что n-я группа содержит n чисел. Доказать, что сумма чисел n-й группы равна n^3.

322. Некоторые члены арифметических прогрессий 17, 21, 25, 29, ... и 16, 21, 26, 31, ... одинаковы. Доказать, что сумма первых p одинаковых членов равна $(10p+11)p$.

323. Показать, что лишь при $a=3$ уравнения

$$2x^2-(3a+2)x+12=0,\quad 4x^2-(9a-2)x+36=0$$

имеют общий корень.

324. Доказать, что для того чтобы уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ с действительными коэффициентами имело бы чисто мнимый корень, необходимо и достаточно, чтобы $ad=bc$ и $ac>0$.

325. Доказать, что если $a\sin^2x+b\cos^2x=1$, $a\cos^2y+b\sin^2y=1$, $a\operatorname{tg}x=b\operatorname{tg}y$ и $a\neq b$, то имеет место равенство $a+b=2ab$.

326. Доказать, что из равенств $\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha=m$, $\sec\alpha-\cos\alpha=n$ следует соотношение $(mn^2)^{\frac{2}{3}}+(m^2n)^{\frac{2}{3}}=1$.

327. Доказать, что если $ab<0$, то имеет место неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant -2.$$

328. Доказать неравенство $\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

329. Доказать, что для того чтобы один из углов треугольника был равен 60° или 120°, необходимо и достаточно, чтобы расстояние от вершины этого угла до ортоцентра было равно радиусу R описанной окружности.

330. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

Семинар 23

331. Из натуральных чисел составлены группы

$$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9),\ \ldots,$$

так что каждая оканчивается квадратом номера группы. Доказать, что сумма чисел n-й группы равна $2n^3-3n^2+3n-1$.

332. Найти все корни уравнения $x^5+9x^3+8x^2+k=0$, если известно, что один корень равен $3i$.

333. Доказать, что $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y=\dfrac{2a(1-b)}{(1+b)^2-a^2}$, если имеют место равенства $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a$ и $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=b$.

334. Доказать, что при $a \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$2a^3 + 2a^2 + 1 > a.$$

335. Доказать, что если ортоцентр треугольника лежит на окружности, проходящей через середины его сторон, то треугольник прямоугольный.

Задание 23

336. Доказать, что только в такой арифметической прогрессии, у которой разность в два раза больше первого члена, отношение суммы первых n членов к сумме kn последующих не зависит от n.

337. Доказать, что имеет место равенство

$$S = \frac{1}{10!} - \frac{1}{9!\,1!} + \frac{1}{8!\,2!} - \frac{1}{7!\,3!} + \frac{1}{6!\,4!} = \frac{1}{2 \cdot 5!\,5!}.$$

338. Доказать, что для любого (комплексного) решения системы

$$x^2 + y^2 + xy + \frac{1}{xy} = a, \quad x^4 + y^4 + x^2 y^2 - \frac{1}{x^2 y^2} - 2 = b^2$$

сумма x^2+y^2 действительна при любых действительных a и b, кроме $a=0$.

339. Доказать, что если при любом положительном k все корни уравнения $ax^2+bx+c+k=0$ вещественны и положительны, то $a=0$ (коэффициенты a, b, c предполагаются действительными).

340. Доказать, что если $\sin x+\sin y=a$ и $\cos x+\cos y=b$, то

$$\cos(x+y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

341. Доказать, что из равенства

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z = 1$$

следует одно из четырех равенств

$$x + y + z = (2k+1)\pi, \quad x + y - z = (2k+1)\pi,$$
$$x - y + z = (2k+1)\pi, \quad -x + y + z = (2k+1)\pi.$$

342. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ac(a+c-2b) \geqslant 0.$$

343. Доказать неравенство

$$a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)\leqslant(1+a^4)(1+b^4).$$

344. Доказать, что пятиугольник правильный, если все его стороны равны и равны три последовательных угла.

345. В остроугольном треугольнике AFE высоты ED и FB пересекаются в точке C. Точки M, N, P и Q являются соответственно серединами отрезков FC, EC, AE и AF. Доказать, что четырехугольник $MQPN$ — прямоугольник.

Семинар 24

346. Доказать равенство

$$A=\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2\pm\frac{1}{x^2}\right)^2+\cdots+\left(x^n\pm\frac{1}{x^n}\right)^2=$$
$$=\pm 2n+\frac{(x^{2n+2}+1)(x^{2n}-1)}{(x^2-1)x^{2n}}.$$

347. Найти все корни уравнения $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

348. Доказать, что если имеют место равенства

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+y)}{b}=\frac{\cos(x+2y)}{c}=\frac{\cos(x+3y)}{d},$$

то

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}.$$

349. Доказать, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ и $ac>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geqslant 4.$$

350. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют также квадрат.

Задание 24

351. Доказать равенство

$$A=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{n}{x^n}=\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x^n(x-1)^2}.$$

352. Доказать равенство

$$x+2x^3+3x^5+\cdots+(n-1)x^{2n-3}+$$
$$+nx^{2n-1}=\frac{x\left[1-(n+1)x^{2n}+nx^{2n+2}\right]}{(1-x^2)^2}.$$

353. Число $1+\sqrt{3}$ является корнем уравнения

$$x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0.$$

Найти все остальные корни этого уравнения, если известно, что a и b — рациональные числа.

354. Решить уравнение

$$x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+2(xy+xz+yz)=16\sqrt{xyz}-1,$$

где x, y, z — положительны.

355. Доказать, что если

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b},\ \text{где}\ a\cdot b>0,$$

то

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

356. Доказать, что если $\cos(2a+b)=1$, то

$$[\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg}a]^2+4=4\cdot\sec^2\frac{b}{2}.$$

357. Доказать неравенство $a(a-b)\geqslant b(a-b)$.

358. Доказать, что если $\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d}$, то $\frac{a+bk}{b}\leqslant\frac{c+dk}{d}$.

359. Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, h — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник со сторонами h, $c+h$, $a+b$ является прямоугольным.

360. Пусть длины a, b, c сторон треугольника, удовлетворяющие неравенствам $a<b<c$, образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $ac=6Rr$, где R — радиус описанного, а r — радиус вписанного в треугольник круга.

Семинар 25

361. Доказать, что

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1.$$

362. Решить уравнение

$$2^x + \sqrt{2^{x+2}\cdot 5^x} = 3\cdot 5^x.$$

363. Доказать, что если сумма

$$a_1\cos(\alpha_1 + x) + a_2\cos(\alpha_2 + x) + \cdots + a_n\cos(\alpha_n + x),$$

при $x=0$ и $x=x_1\neq k\pi$ (k — целое) обращается в нуль, то она тождественно, т. е. при любом значении x, равна нулю.

364. Доказать неравенство

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geqslant 2x(xy^2 - x + z + 1).$$

365. Доказать, что для того, чтобы треугольник ABC был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы его углы были связаны зависимостью $\sin C = \cos A + \cos B$.

Задание 25

366. Найти арифметическую прогрессию $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, если известно, что $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=a$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=b^2$, $nb^2-a^2\neq 0$.

367. Доказать, что можно найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$, каждый член которой отличается от суммы всех следующих за ним членов заданным постоянным множителем k. При каких k задача возможна?

368. Решить уравнение

$$4^x + 2^{x+1}\cdot 3^x - 9^x\cdot 3 = 0.$$

369. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x.$$

370. Доказать, что из соотношений $\sin\alpha = A\cdot\sin\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = B\cdot\operatorname{tg}\beta$, $A\neq 0$, $B\neq\pm 1$, $\beta\neq k\pi$ следует в общем случае, что

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}}, \quad \sin\beta = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{A^2-B^2}{1-B^2}}.$$

371. Доказать, что если $A+B+C+D=2\pi$, то имеет место равенство

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{A+C}{2}\cdot\sin\frac{A+D}{2}.$$

372. Доказать, что если $x+y+z=1$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

373. Доказать, что если $xy+yz+zx=1$, то

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 1.$$

374. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 20°. Доказать, что имеет место равенство $a^3+b^3=3ab^2$, где a — основание треугольника, b — боковая сторона.

375. Доказать, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны, то его диагонали перпендикулярны.

Семинар 26

376. Доказать, что сумма чисел, обратных членам геометрической прогрессии, равна сумме всех членов геометрической прогрессии, деленной на произведение ее первого и последнего членов.

377. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6.$$

378. Доказать, что если имеют место равенства

$$\frac{\cos(\alpha-3\varphi)}{\cos^3\varphi}=\frac{\sin(\alpha-3\varphi)}{\sin^3\varphi}=m,\ \text{то}\ \cos\alpha=\frac{2-m^2}{m}.$$

379. Доказать, что если $a>b>0$, то имеют место неравенства

$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

380. Окружность высекает из всех сторон четырехугольника равные отрезки. Доказать, что суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны между собой.

Задание 26

381. Доказать, что сумма квадратов нечетного числа последовательных членов геометрической прогрессии, все члены которой целые числа, делится на сумму первых степеней тех же членов.

382. Найти коэффициент при x^n в разложении

$$(1 + x + 2x^2 + \cdots + nx^n)^2.$$

383. Решить уравнение $4^x + 10^x = 25^x$.

384. Для каждого отрицательного m решить уравнение

$$4^x - 4 \cdot m \cdot 2^x + 2m + 2 = 0.$$

385. Доказать, что

$$\frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} - \sqrt{2} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x, & \text{если } 2k\pi < x < (2k+1)\pi; \\ -\sqrt{2}\,(\operatorname{ctg}^2 x + 2), & \text{если } (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi. \end{cases}$$

386. Доказать, что если имеет место равенство

$$q \sin B = p \cdot \sin(2A + B), \text{ то } (q-p) \cdot \operatorname{tg}(A+B) = (p+q) \operatorname{tg} A.$$

387. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство

$$(a^3 + b^3 + c^3) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant (a + b + c)^2.$$

388. Доказать, что если $a > b \geqslant 0$, то имеет место неравенство $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} \geqslant a$.

389. Стороны a, b, c треугольника связаны зависимостью $a^n = b^n + c^n$, где $n > 0$. Определить, при каких n треугольник прямоугольный, остроугольный, тупоугольный.

390. Доказать, что если высоты h_a, h_b, h_c треугольника и радиус r вписанной в него окружности удовлетворяют равенству $h_a + h_b + h_c = 9r$, то треугольник равносторонний.

Семинар 27

391. Доказать, что

$$S = n + (n-1)x + (n-2)x^2 + (n-3)x^3 + \cdots + 2 \cdot x^{n-2} + x^{n-1} = \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

392. Доказать, что функция $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$ является нечетной.

393. Доказать, что из системы равенств $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a$, $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = b$, где $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ следует, что $a^2 - b = 2$.

394. Доказать, что если a, b, c и d неотрицательны, то имеет место неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

395. Доказать, что в любом треугольнике точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанного круга лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

Задание 27

396. Найти сумму n первых членов ряда

$$1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 + \cdots + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots [2(k-1)(2k-1)] + \cdots.$$

397. Найти сумму n первых членов ряда

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 + \cdots + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (2k-1)(2k) + \cdots.$$

398. Доказать, что если $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, то

$$f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right).$$

399. Доказать, что $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \log_{10} 9 = \log_{10} 2 = \lg 2$.

400. Доказать, что если имеют место равенства

$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta, \quad b = c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma,$$
$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha,$$

где a, b, c — положительные числа, а α, β, γ принадлежат интервалу $(0, \pi)$, то

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \quad \text{и} \quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

401. Доказать, что из равенства $a\cdot\cos^2\alpha+b\cdot\cos\alpha+c=0$ следует, что $a^2\cos^2 2\alpha+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2\alpha+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0$.

402. Доказать, что $2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}<2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}$, где $x\geqslant 1$.

403. Доказать, что при любом натуральном $n\geqslant 2$ имеют место неравенства

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

404. Круг, вписанный в треугольник ABC, касается стороны AB в точке D, причем $AC\cdot CB=2AD\cdot DB$. Доказать, что треугольник прямоугольный.

405. Доказать, что расстояние точки окружности от хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями концов хорды от касательной к кругу в этой точке.

Семинар 28

406. Дана последовательность чисел

$$a+b,\quad ap+bq,\quad ap^2+bq^2,\quad ap^3+bq^3,\ldots.$$

Найти такие два числа x и y, чтобы каждый член этой последовательности был бы равен сумме произведений предыдущего члена на x и предпредыдущего на y.

407. Доказать, что

$$\log_{\frac{1}{m}}\frac{1}{n}=\log_m n.$$

408. Доказать, что из равенства $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$ следует, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha$.

409. Доказать неравенство $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2$.

410. Даны окружность O и две точки A и B. Доказать, что продолжение общей хорды окружности O и любой другой окружности, проходящей через точки A и B (и пересекающей окружность O), пересекается с прямой AB в определенной точке, лежащей на продолжении хорды AB.

Задание 28

411. Доказать, что если сумма m членов арифметической прогрессии равна как сумме следующих n членов, так и сумме p следующих членов, то имеет место соотношение

$$(m+n)\cdot\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=(m+p)\cdot\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

412. Доказать, что $\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}$, где S_m, S_n, S_{m+n} суммы m, n, $m+n$ первых членов арифметической прогрессии.

413. Доказать, что если $\log_a N=p$, $\log_b N=q$, $\log_{abc} N=r$, то

$$N=c^{\frac{pqr}{pq-r(p+q)}}.$$

414. Доказать, что $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\log_d a$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, $b\neq 1$, $c\neq 1$, $d\neq 1$.

415. Доказать, что если $\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$, то

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

416. Доказать, что если $(x-a)\cdot\cos\theta+y\cdot\sin\theta=(x-a)\cdot\cos\varphi+y\cdot\sin\varphi=a$ и $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=2k$, то имеет место соотношение $y^2=2ax-(1-k^2)x^2$.

417. Доказать, что $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}\geqslant 4$.

418. Доказать, что при всех допустимых значениях x имеют место неравенства

$$-3 \leqslant \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} \leqslant 3.$$

419. Доказать, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна сумме радиусов описанного и вписанного кругов.

420. Доказать, что если четырехугольник вписанный, то сумма произведений противолежащих сторон его равна произведению его диагоналей (теорема Птолемея).

Семинар 29

421. Доказать, что сумма

$$S = ax + (a + ab)x^2 + (a + ab + ab^2)x^3 + \dots = \frac{ax}{(1-x)(1-bx)},$$

где $|x|<1$, $|bx|<1$.

422. Доказать, что если положительные числа a, b, c связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$ и $b+c\neq 1$, $c-b\neq 1$, то имеет место равенство

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a.$$

423. Доказать, что из соотношений

$$\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\varphi = \cos\gamma\cdot\cos\theta,$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}, \quad \cos\alpha \neq 0,$$

следует, что $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}$.

424. Доказать неравенство

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

425. На диаметре AB полукруга AMB построен вне его прямоугольник, высота которого AC равна стороне вписанного в круг квадрата. Доказать, что если соединить вершины C и D с произвольной точкой M дуги полукруга прямыми CM и DM, пересекающими диаметр в точках E и F, то $AF^2+BE^2=AB^2$ (задача Ферма).

Задание 29

426. Доказать, что если p-й, q-й, r-й и s-й члены арифметической прогрессии составляют геометрическую прогрессию, то числа $p-q$, $q-r$ и $r-s$ также составляют геометрическую прогрессию.

427. Доказать, что

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{3}{7^5}+\frac{4}{7^6}+\frac{2}{7^7}+\frac{3}{7^8}+$$
$$+\frac{4}{7^9}+\ldots=\frac{41}{114}.$$

428. Даны три числа a, b, c такие, что

$$0<a\neq 1,\quad 0<b\neq 1,\quad 0<c\neq 1,\quad 0<abc\neq 1.$$

При каком соотношении между числами a, b, c будет выполняться равенство $\log_a x+\log_b x+\log_c x=\log_{abc} x$ при всех положительных x?

429. Доказать, что из равенства $a^2+b^2=7ab$ следует, что

$$\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

430. Доказать, что если имеют место три соотношения

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha,$$
$$\cos b=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta,$$
$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma,$$

где числа a, b, c, α, β, γ принадлежат интервалу $(0, \pi)$, то

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

431. Доказать, что произведение

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}\alpha=\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\cdot\sin\alpha}.$$

432. Доказать, что если $a>b>0$, то

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}\text{ при }x>\sqrt{ab}.$$

433. Доказать неравенство

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a|+|b|+|c|.$$

434. Доказать, что точка, симметричная центру окружности относительно середины средней линии треугольника, вписанного в эту окружность, лежит на высоте, перпендикулярной к этой средней линии.

435. Перпендикуляры AD и CD, проведенные к сторонам AB и BC треугольника ABC, пересекаются в точке D. Доказать, что расстояния от точек B и D до перпендикуляра, проведенного к стороне AC через его середину, равны.

Семинар 30

436. Найти сумму

$$S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2,$$

где a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n-1}, a_{2n} — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью d.

437. Доказать, что имеет место неравенство

$$\lg(k!) > \frac{3}{10}\,k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right),$$

предварительно доказав, что $\lg(n+1) > \frac{3}{10\,n} + \lg n$.

438. Доказать, что $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, если $A+B+C=\pi$ и $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

439. Доказать, что если $x^2+y^2 \leqslant 2$, то $|x+y| \leqslant 2$.

440. Доказать, что для всякой хорды AB данной окружности отношение $AB^2 : AD$, где AD — расстояние точки A до касательной к окружности в точке B, есть величина постоянная.

441. Доказать равенство

$$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{4}{a^4+1}+\cdots+\frac{2^n}{a^{2^n}+1} = \frac{1}{a-1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

Задание 30

442. Доказать, что многочлен $x^n - ax^{n-1} + ax + 1$ делится на $(x-1)^2$ при $a = \frac{n}{n-2}$, где n — любое натуральное число, большее двух.

443. Доказать, что при любых положительных N и a, отличных от 1, имеет место равенство

$$\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_{a^2} N} + \frac{1}{\log_{a^3} N} + \cdots + \frac{1}{\log_{a^n} N} = \frac{n(n+1)}{2} \log_N a.$$

444. Доказать, что для того, чтобы равенство $\log_x a + \log_y a = \log_{x+y} a$, где $a>0$, $a \neq 1$, $x>0$, $y>0$, было тождеством относительно a, необходимо и достаточно, чтобы $1 + \log_y x = \log_{x+y} x$.

445. Доказать, что если $A = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ и $B = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, то $\cos 2A = \sin 4B$.

446. Доказать, что $\operatorname{ctg}[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1-x)] = 1 - x + x^2$.

447. Доказать неравенство

$$x^2y^4 + 2(x^2+2)y^2 + 4xy + x^2 \geqslant 4xy^3.$$

448. Доказать, что для любых натуральных n и p имеют место неравенства:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

449. Окружность радиуса, равного высоте некоторого равнобедренного треугольника, катится по основанию этого треугольника. Доказать, что величина дуги, отсекаемой на окружности боковыми сторонами треугольника, остается при этом постоянной. Будет ли это предложение верно для неравнобедренного треугольника?

450. Доказать, что произведение отрезков, отсекаемых подвижной касательной к окружности на двух неподвижных параллельных касательных, есть величина постоянная.

Семинар 31

451. Доказать, что если n и k нечетные натуральные числа, то сумма $1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k$ делится на n.

452. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(y-x)=\log_8(3y-5x), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

453. Доказать, что если $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\pi$, то имеет место равенство $x+y+z=xyz$.

454. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{3}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}.$$

455. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Отрезок AB является диаметром большей окружности. Хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Доказать, что AC является биссектрисой треугольника ABK.

Задание 31

456. Доказать, что число 600! не делится на 7^{99}.

457. Доказать, что многочлен $x^3+y^3+z^3+axyz$ делится на сумму $x+y+z$ только при $a=-3$.

458. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\cdot 2^{x-y+1}+3y\cdot 2^{2x+y}=2, \\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1. \end{cases}$$

459. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\cdot 9^{y-x}+2y\cdot 3^{-x-y}=8\cdot 3^{-2x+y}, \\ 3x\cdot 3^{2y+x}+2y\cdot 3^{2x-y+1}=72\cdot 9^{x-y}. \end{cases}$$

460. Доказать, что $a+b=2ab$, если известно, что система уравнений

$$a\cdot\sin^2x+b\cdot\cos^2x=1,\quad a\cdot\cos^2y+b\cdot\sin^2y=1,$$

$$a\cdot\operatorname{tg}x=b\cdot\operatorname{tg}y$$

разрешима и что $a\neq b$.

461. Доказать, что

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

462. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$\frac{1+a+b}{2} \geqslant \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}.$$

463. Доказать неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c).$$

464. Доказать, что окружности, проходящие соответственно через каждые две вершины треугольника и его ортоцентр, равны окружности, описанной около данного треугольника.

465. Доказать, что отрезок, соединяющий середины касательных, проведенных из одной точки к окружности, не пересекает окружность.

Семинар 32

466. Доказать, что если многочлен $f(x, y)$, симметричный относительно x и y, делится на $x-y$, то он делится и на $(x-y)^2$.

467. Решить неравенство

$$\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0.$$

468. Решить уравнение

$$5\sin 5x - 3\sin 7x = 8.$$

469. Доказать, что если $a > b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то имеет место неравенство $\sqrt[n]{a-b} > \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$.

470. Биссектриса угла треугольника делит его на два треугольника. Доказать, что если радиусы окружностей, вписанных в полученные треугольники, равны, то исходный треугольник равнобедренный.

Задание 32

471. Доказать, что дробь $\frac{2n+3}{5n+7}$ несократима ни при каком целом n.

472. Доказать, что если p и q — простые числа, $p-1$ делится на q, q^3-1 делится на p, то имеет место равенство $p=1+q+q^2$.

473. Для каждого положительного числа a $(a\neq 1)$ решить уравнение

$$(\log_a \sin x)^2 + \log_a \sin x - a = 0.$$

474. Доказать, что уравнение

$$\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$$

имеет лишь один корень, удовлетворяющий неравенству $x>1$, и найти этот корень.

475. Решить уравнение $4\sin x+2\cos x=2+3\operatorname{tg} x$.

476. Решить уравнение $(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg} x\cdot\cos 2x$.

477. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a+b>c$, n — натуральное число, то имеет место неравенство $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{c}$.

478. Доказать, что если $|x|<1$, то имеет место неравенство $(1-x)^n+(1+x)^n\leqslant 2^n$, где n — натуральное число.

479. Прямоугольник со сторонами a и b разбит диагональю на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Доказать, что расстояние между точками касания окружностей с диагональю равно $|a-b|$.

480. Дан такой четырехугольник $ABCD$, что продолжения всех его сторон касаются одной и той же окружности. Доказать, что модули разности противоположных сторон этого четырехугольника равны между собой, т. е. что $|AD-BC|=|CD-AB|$.

Семинар 33

481. Доказать, что число $N=2(a-1)^{n+1}-(2-a)^n$, где a и n — произвольные натуральные числа, делится на число $2a-3$.

482. Доказать, что для натуральных n и k, где $k \leqslant n$, имеют место неравенства

$$k! \cdot (k+1)^{n-k} \leqslant n! \leqslant k!\, n^{n-k}.$$

483. Доказать, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{1+a^x} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } a = 1, \\ 1, & \text{если } a > 1. \end{cases}$$

484. Через концы диаметра AB проведены касательные к окружности. Доказать, что если третья касательная пересекает их в точках M и N, то $AM \cdot BN = R^2$, где R — радиус окружности.

485. В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной a. Прямая, соединяющая одну из вершин верхнего основания с центром нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Известно, что внутрь этой призмы можно поместить шар, касающийся всех граней призмы. Найти боковое ребро призмы.

Задание 33

486. Доказать, что многочлен $F(x) = x^{301} + x^{344} + 1$ делится на $f(x) = x^2 + x + 1$.

487. Доказать, что при любом натуральном $n > 2$ многочлен $F(x) = (x^n - 1) \cdot (x^{n-1} - 1) \cdot (x^{n-2} - 1)$ делится на многочлен $f(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^3 - 1)$.

488. Доказать, что если $a < \sqrt[3]{b} < a + 1$, где $a > 0$, то имеют место неравенства

$$\frac{a(a^3 + 2b)}{2a^3 + b} < \sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)[(a+1)^3 + 2b]}{2(a+1)^3 + b}.$$

489. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $n! \geqslant 2^{n-1}$.

490. Доказать, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 < a < 1; \\ 0, & \text{если } a = 1; \\ 1, & \text{если } a > 1. \end{cases}$$

491. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\dfrac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

492. Даны прямая и две точки по одну сторону от нее. На этой прямой найти точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух данных точек была наименьшей.

493. Даны прямая a и две точки A и B по разные стороны от нее. Найти на прямой a такую точку, чтобы разность расстояний от нее до точек A и B была наибольшей.

494. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA=AB$ ($MB=2AB$). Через точки M, B_1 и середину E ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

495. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. На продолжении ребра A_1B_1 взята точка M так, что $B_1M=\dfrac{1}{2}A_1B_1\left(A_1M=\dfrac{3}{2}A_1B_1\right)$. Через точку M и середины ребер A_1C_1 и B_1B проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Семинар 34

496. Известно, что число A есть $2m$-значное, изображенное одними четверками, число B есть $(m+1)$-значное, изображенное двойками, и число C есть m-значное, изображенное одними восьмерками. Доказать, что число $A+B+C+7$ является точным квадратом.

497. Доказать, что при n-натуральном, большем 2, имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1.$$

498. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$.

499. На стороне треугольника найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух других сторон была наименьшей.

500. В треугольной пирамиде все плоские углы вершины прямые. Доказать, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан основания и центр описанного вокруг пирамиды шара лежат на одной прямой.

Задание 34

501. Определить a и b так, чтобы многочлен $x^4+x^3+x^2+ax+b$ был полным квадратом.

502. Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ нельзя представить в виде $m+\sqrt{n}$, где m и n рациональные числа, причем число $n>0$ и не является полным квадратом.

503. Доказать, что если $0<x<1$, а n — натуральное число, то имеет место неравенство

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}.$$

504. Доказать, что если $n>1$, то $x+\frac{1}{nx}>1+\frac{1}{n}$ при $x>1$ или при $0<x<\frac{1}{n}$.

505. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, где $n>2$.

506. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

507. Внутри треугольника найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до сторон треугольника была наименьшей.

508. На полуокружности данного диаметра $AB=2R$ построить точку C так, чтобы произведение хорды AC на длину перпендикуляра CD, опущенного из этой точки на диаметр, принимало наибольшее значение.

509. Найти объем параллелепипеда, если все его грани — равные ромбы со сторонами a и острыми углами α.

510. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

Семинар 35

511. Найти многочлен второй степени $f(x)$, свободный член которого равен нулю, и удовлетворяющий тождеству $f(x)-f(x-1)=x$. Также доказать, что сумма n первых натуральных чисел равна $f(n)$.

512. Доказать, что если $a \geqslant b > 0$, то для натурального n имеют место неравенства

$$n(a-b)b^{n-1} \leqslant a^n - b^n \leqslant n(a-b)a^{n-1}.$$

513. Доказать, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

514. На окружности даны две точки A и B. Найти на ней третью точку C так, чтобы произведение хорд AC и BC было наибольшим.

515. Доказать, что две плоскости, проведенные через концы двух троек ребер параллелепипеда, исходящих из концов диагонали параллелепипеда, рассекают эту диагональ на три равные части.

Задание 35

516. Найти многочлен третьей степени $f(x)$, свободный член которого равен нулю, и удовлетворяющий тождеству $f(x)-f(x-1)=x^2$. Также доказать, что сумма квадратов первых n натуральных чисел равна $f(n)$.

517. Доказать, что для того, чтобы многочлен $f(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$ был полным кубом, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$C = \frac{B^2}{3A}, \quad D = \frac{B^3}{27A^2}.$$

518. Доказать неравенство

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leqslant \frac{2n-1}{n}.$$

519. Доказать, что если $x>0$, $x \neq 1$, n — натуральное, то имеет место неравенство

$$x + \frac{1}{x^n} > 2n \cdot \frac{x-1}{x^n-1}.$$

520. Доказать, что

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=-2.$$

521. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}=0.$$

522. Найти внутри треугольника точку, произведение расстояний которой до сторон треугольника имело бы наибольшее значение.

523. Найти наименьшую хорду круга, которую можно провести через данную точку, взятую внутри этого круга.

524. Показать, что если плоскость, проведенная через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отсекает от параллелепипеда правильный тетраэдр, то параллелепипед можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

525. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре BD расположена точка M так, что $3DM=a$. Прямой круговой конус расположен так, что его вершина находится на середине ребра AC, а окружность основания проходит через точку M и пересекает ребра AB и BC. Найти радиус основания этого конуса.

Семинар 36

526. Решить уравнение $60x-77y=1$ в целых числах.

527. Доказать, что при натуральном $n\geqslant 3$ имеет место неравенство $2^n>2n+1$.

528. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]=0$.

529. По одну сторону от прямой xy даны две точки A и B. Расположить на прямой xy отрезок CD данной длины так, чтобы ломаная $ACDB$ была наименьшей длины.

530. Доказать, что если из точки O, лежащей на основании ABC тетраэдра $SABC$, провести прямые Oa, Ob, Oc, параллельные ребрам SA, SB, SC, до пересечения их

соответственно с гранями SBC, SCA, SAB в точках a, b, c, то имеет место соотношение

$$\frac{Oa}{SA}+\frac{Ob}{SB}+\frac{Oc}{SC}=1.$$

Задание 36

531. Доказать, что уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$ не имеет решений в натуральных числах.

532. Решить уравнение $x^2-y^2=221$ в натуральных числах.

533. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число

$$29^n+19^n+15^n-2^n(1+2^{3n}+3^n)$$

делится на 13.

534. Доказать, что для любого натурального $n\geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

535. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\right]=1.$$

536. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\frac{a+b}{2}.$$

537. На стороне AB квадрата, вписанного в окружность с центром O, как на диаметре, описана полуокружность, расположенная вне квадрата. Радиус OMN пересекает эту полуокружность в точке N, а первую окружность — в точке M. Показать, что криволинейный треугольник, заключенный между отрезком прямой MN и дугами MA, NA, квадрируем, т. е., что можно построить (при помощи циркуля и линейки) сторону равновеликого ему квадрата.

538. Провести прямую параллельно стороне данного треугольника, чтобы получилась трапеция с периметром, равным $2p$.

539. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что одно ребро куба лежит на средней линии основания пирамиды; вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности пирамиды; центр куба лежит на высоте пирамиды. Найти отношение объема пирамиды к объему куба.

540. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды равна диагонали этого квадрата. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной ее высоте и двум противоположным сторонам основания. Найти периметр сечения, если известно, что в него можно вписать окружность.

Семинар 37

541. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$.

542. Доказать, что при любом натуральном $n\geqslant 2$ имеет место неравенство

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n.$$

543. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{3}.$$

544. Прямая MN пересекает отрезок AB. Построить треугольник ABC так, чтобы MN была биссектрисой угла C.

545. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре AB, как на диаметре, построена сфера. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающегося построенной сферы.

Задание 37

546. Решить уравнение

$$\cos^4 x+\sin^4 x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$

547. Решить уравнение

$$(7+\sin x)\cdot\sin^4\frac{x}{2}=(7+\sin x)\cdot\sin^2\frac{x}{2}-2.$$

548. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

549. Доказать, что при положительном x

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+x^2+x^0+\frac{1}{x^0}+\frac{1}{x^2}+$$

$$+\frac{1}{x^4}+\cdots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1 \text{ при } n \text{ четном,}$$

и

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^{n-4}}+$$

$$+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1 \text{ при } n \text{ нечетном.}$$

550. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=0$, где a — постоянная величина.

551. Доказать, что

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=0$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=\infty$.

552. Построить треугольник по двум сторонам, зная, что сумма соответствующих им высот равна третьей высоте.

553. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=AC)$ на продолжении стороны AB отложен отрезок BD, а на стороне AC — отрезок CE, равный BD. Доказать, что если на отрезках BD и DE построить параллелограмм $DBFE$, то FC перпендикулярен BC.

554. Внутри правильного тетраэдра $DABC$ расположены два шара радиусов $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем один шар вписан в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке C, а другой — в трехгранный угол с вершиной в точке B. Найти длину ребра этого тетраэдра.

555. Ребро правильного тетраэдра $SABC$ равно a. Через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30°. Найти площадь сечения.

Семинар 38

556. Решить уравнение $3\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$.

557. Доказать, что модуль суммы нескольких величин не больше суммы их модулей, т. е.

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

558. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

559. Построить треугольник ABC по данным двум сторонам $AC=b$, $AB=c$, зная, что $\angle A=2\angle B$.

560. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. На продолжении ребер AB, AA_1, AD отложены соответственно отрезки BP, A_1Q, DR длиной 1,5 AB ($AP=AQ=AR=2{,}5\ AB$). Через точки P, Q и R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

Задание 38

561. Решить уравнение

$$\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^8 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}.$$

562. Решить уравнение

$$\sin^5 x-\cos^5 x=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}.$$

563. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство

$$\frac{10^{n-1}+1}{10^n+1}>\frac{10^n+1}{10^{n+1}+1}.$$

564. Доказать, что

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n,$$

если a_1, a_2, ..., a_n — положительные числа и

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=1.$$

565. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=4.$$

566. Доказать, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=-\infty.$$

567. В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной a, провести прямую, которая пересечет боковые стороны AB и BC соответственно в точках K и N, а продолжение стороны AC в точке M так, чтобы треугольник KNB, треугольник NCM и четырехугольник $AKNC$ были равновелики.

568. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно a и b. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α. Найти площадь трапеции.

569. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна a, а высота равна $2a\sqrt{2}$. Через вершину A параллельно диагонали BD основания пирамиды проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30°. Найти площадь сечения.

570. Внутри правильного тетраэдра с ребром a лежат четыре равных шара так, что каждый шар касается трех других шаров и трех граней тетраэдра. Определить радиус этих шаров.

Семинар 39

571. Решить уравнение

$$8\cos^6 x=3\cos 4x+\cos 2x+4.$$

572. Доказать, что при любом положительном x имеет место неравенство $5^x+13^x>2^{3x+1}$.

573. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}=\infty.$$

574. Расстояние между центрами двух пересекающихся кругов радиусов R и r равно d. Найти площадь их общей части.

575. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна стороне основания. Внутри пирамиды расположено два шара: шар радиуса r касается всех боковых граней; шар радиуса $2r$ касается основания и двух смежных боковых граней. Оба шара касаются друг друга внешним образом. Найти апофему пирамиды.

Задание 39

576. Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{16}.$$

577. Решить уравнение

$$(\sin 2x+3)\cdot\sin^4 x-(\sin 2x+3)\cdot\sin^2 x+1=0.$$

578. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то имеет место неравенство

$$3-6\sin^2\alpha+4\sin^3\alpha>0.$$

579. Доказать, что при любых x имеет место неравенство

$$2-\sin^2 3x+\cos^2 5x-\cos 8x-\cos 2x+\sin^2 x>$$
$$>\sin^2 x\cdot\cos 5x.$$

580. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$$

581. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}=k.$$

582. В треугольнике ABC длины сторон a, b и c и площадь S связаны соотношением $S=a^2-(b-c)^2$. Найти угол A.

583. В треугольнике ABC даны углы A, B, C и радиус R описанной вокруг него окружности. Внутри этого треугольника взяты две точки P и Q такие, что $\angle PCA=\angle QCB=\frac{C}{3}$, $\angle PAC=\frac{A}{3}$, $\angle QBC=\frac{B}{3}$. Найти площадь треугольника PQC.

584. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину F ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

585. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CB взята точка M так, что $MB=\frac{1}{2}BC, \left(MC=\frac{3}{2}BC\right)$. Через точку M и середины K и N ребер AB и SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Семинар 40

586. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x}+\cos x=0.$$

587. Доказать, что если $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$, то выполняется неравенство

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)>1.$$

588. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}=\frac{2}{5}.$$

589. Из точки A, лежащей на окружности радиуса r, проведены две хорды AC и AB. Эти хорды лежат по одну сторону от диаметра окружности, проходящего через точку A. Даны длина b большей хорды и $\angle BAC=\alpha$. Найти радиус окружности, которая касается хорд AB и AC и дуги BC.

590. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка M так, что $DM=2CD$, $(CM=3CD)$. Через точки M, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Задание 40

591. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin 2x\cdot\sin 4x+\sin 3x\cdot\sin 9x+$$
$$+\cdots+\sin nx\cdot\sin(n^2x)=1.$$

592. Решить уравнение $\sin 3x+\sin 2x=a\cdot\sin x$.
При каких значениях a уравнение имеет решения?

593. Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}\text{, где } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

594. Решить неравенство

$$1<\frac{3x-1}{2x+1}<2.$$

595. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=6.$$

596. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\frac{1}{8}.$$

597. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, катеты которого CA и CB равны a, взята точка P такая, что $\angle PAC=\frac{\pi}{12}$, $\angle PBC=\frac{\pi}{24}$. Найти расстояние от точки P до центра вписанной окружности.

598. В равнобедренном треугольнике дана боковая сторона b и угол при основании α. Вычислить расстояние от центра вписанной окружности до центра описанной окружности.

599. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь вершины основания на противоположную ей боковую грань, равен b. Определить объем пирамиды.

600. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

Семинар 41

601. Решить уравнение

$$\sec x+\operatorname{cosec} x+\sec x\cdot\operatorname{cosec} x=a.$$

При каких значениях параметра a уравнение имеет решения?

602. Решить неравенство $x \cdot |x| - 4x + 3 < 0$.

603. Доказать, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} = \frac{1}{2}.$$

604. AOB — сектор круга радиуса r. Угол $AOB = \alpha$, $(\alpha < \pi)$. Найти радиус окружности, лежащей внутри этого сектора и касающейся хорды AB, дуги AB и биссектрисы угла AOB.

605. Внутри прямого кругового цилиндра, высота которого равна $3r$, лежат три равных шара радиуса r так, что каждый шар касается двух других шаров и боковой поверхности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания, а третий шар касается верхнего основания. Найти радиус основания цилиндра.

Задание 41

606. Найти все решения уравнения $\cos^n x - \sin^n x = 1$, где n — любое натуральное число. Рассмотреть случаи: $n = 1$, n — любое четное число, n — любое нечетное число, отличное от 1.

607. При каких значениях параметра $\alpha \neq k\pi$ уравнение $x^2 \sin \alpha + 2x + \operatorname{tg} \alpha = 0$ имеет действительные корни?

608. Решить неравенство

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}.$$

609. Решить неравенство

$$\frac{2x}{\sqrt{2x + 9}} < \sqrt{1 + 2x} - 1.$$

610. Доказать, что

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x^2 - \alpha^2} = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}.$$

611. Доказать, что

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x \right] = 1.$$

612. Стороны параллелограмма равны 3 *см* и 2 *см*, а угол между ними равен $\arccos\frac{5}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят параллелограмм на четыре равновеликие части. Найти длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

613. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них внешним образом касается двух других. Радиусы этих окружностей относятся как $1:2:3$. Вычислить углы треугольника, вершины которого расположены в точках касания.

614. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а большее боковое ребро составляет с основанием угол β. В пирамиду вписан шар. Найти радиус шара.

615. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник со сторонами $AB=AC=5$, $BC=6$; высота пирамиды проходит через середину BC и равна 1. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Семинар 42

616. Доказать, что уравнение $\sin x+\cos x=\frac{2(a^2+b^2)-ab}{2ab}$, где a и b — числа одного знака, не имеет решения.

617. Решить неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x}<1.$$

618. Доказать, что

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

619. К двум непересекающимся окружностям проведены общие касательные прямые. Угол между внешними касательными равен α, а угол между внутренними касательными равен β. Найти угол между прямыми, проведенными из центра окружности большего радиуса касательно ко второй окружности.

620. Найти высоту треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны a, b, c, а все плоские углы при вершине прямые.

Задание 42

621. Доказать, что уравнение

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)+1}{a+\cos\left(\frac{\pi}{6}+7x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=0$$

имеет решение при любом $a\neq 2$. Найти решения уравнения.

622. Доказать, что если $a<\frac{1}{32}$, то уравнение $(\arcsin x)^3+(\arccos x)^3=a\pi^3$ не имеет решения.

623. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geqslant 2.$$

624. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2.$$

625. Доказать, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{\cos\frac{\pi x}{4}}=-\frac{16}{\pi}.$$

626. Доказать, что

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=-\frac{3}{2}.$$

627. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса r, проведена секущая, не проходящая через центр O окружности. Пусть B и C точки, в которых секущая пересекает окружность. Обозначим $\angle AOB$ через α, $\angle AOC$—β. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если $OA=a$.

628. Найти острые углы прямоугольного треугольника, если его стороны образуют геометрическую прогрессию.

629. Даны две точки A и B, лежащие по одну сторону от плоскости. Найти на этой плоскости такую точку, чтобы сумма ее расстояний от точек A и B была наименьшей.

630. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равно a и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр (цилиндр, у которого осевое сечение — квадрат) так, что боковой поверхностью он касается основания пирамиды вдоль диагонали этого основания, а окружности оснований цилиндра касаются боковых граней пирамиды. Найти радиус основания цилиндра.

Семинар 43

631. Доказать, что уравнение $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{4}{5}$ не имеет решений.

632. Решить неравенство

$$|x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots| < 1, \text{ где } |x| < 1.$$

633. Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(a + x) - \cos(a - x)}{x} = -2 \sin a.$$

634. Найти острые углы прямоугольного треугольника, если его стороны составляют арифметическую прогрессию.

635. Четыре стороны равнобочной трапеции касаются цилиндра, ось которого перпендикулярна к параллельным сторонам трапеции. Найти угол, образуемый плоскостью трапеции с осью цилиндра, зная что длины оснований трапеции равны a и b, а высота трапеции равна h.

Задание 43

636. Доказать, что уравнение

$$2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$$

не имеет решений.

637. Доказать, что уравнение

$$\sin^2 x + 2 \operatorname{tg}^2 x - 2 \sin x - 2 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

не имеет решений.

638. Решить неравенство

$$4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x + 4 \cdot 4^{\sqrt{x}}.$$

639. Решить неравенство

$$\log_x [\log_2 (4^x - 6)] < 1.$$

640. Доказать, что

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

641. Доказать, что

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = -3.$$

642. Доказать, что если между углами треугольника имеет место зависимость

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \cos(A - B) \cdot \cos C - \cos^2 C = \frac{1}{4},$$

то угол C равен либо 30°, либо 150°.

643. Даны углы B и C треугольника ABC ($\angle B \neq \angle C$). Найти котангенс острого угла, который образует медиана AM, выходящая из вершины A, со стороной BC.

644. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах и попарно между собой. Найти радиусы шаров, если известны длина c стороны AB и прилежащие к ней углы A и B.

645. На плоскости лежат вокруг общей вершины n равных последовательно касательных конусов (каждый конус касается двух других). Найти угол при вершине осевого сечения каждого из этих конусов.

Семинар 44

646. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} 10x = \dfrac{2}{(1 - \operatorname{tg}^2 5x) \cdot \cos 5x}$ не имеет решений.

647. Решить неравенство

$$\log_2 (\sqrt{x+3} - x - 1) \leqslant 0.$$

648. Доказать, что

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt[3]{23 + x} - 3} = 27.$$

649. Доказать, что у непрямоугольного треугольника между его углами A, B, C и сторонами a и b, противолежащими углам A и B, имеет место зависимость

$$\frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} A} = \frac{a^2}{b^2}.$$

650. На плоскости стоит круговой конус и вертикальный штатив. Радиус основания конуса равен 1 *м*, высота равна 2 *м*. Основание штатива отстоит от центра основания конуса на 2 *м*, а высота штатива равна 4 *м*. На вершине штатива помещен точечный источник света. Найти площадь тени конуса (не считая площади основания).

Задание 44

651. Доказать, что уравнение

$$\sin^{10} x \cdot \cos^{12} x = \frac{1}{1000}$$

не имеет решения.

652. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{cases}$$

653. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) > \log_2 (2 - x).$$

654. Решить неравенство

$$x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1.$$

655. Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin (a + x) - \sin (a - x)}{\operatorname{tg} (a + x) - \operatorname{tg} (a - x)} = \cos^3 a.$$

656. Доказать, что

$$\lim_{x \to 1} \left[(1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

657. Доказать, что если имеет место равенство

$$\operatorname{tg} 3\alpha = 2 \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha,$$

где 4α — угол треугольника, то треугольник прямоугольный.

658. Доказать, что если стороны треугольника численно равны $\cos 5°$, $\cos 35°$, $\cos 50°$, то треугольник остроугольный.

659. Найти отношение объема конуса к объему вписанного в него шара, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отсекает на этой образующей, считая от вершины, отрезок, в k раз больший радиуса шара.

660. Между двумя параллельными плоскостями заключен конус так, что его основание находится на одной из них, а вершина S — на другой. Угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину M оси проведена прямая, составляющая с ней угол β. Отрезок CD этой прямой между параллельными плоскостями равен d. Найти ее отрезок AB, заключенный внутри конуса.

Семинар 45

661. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 3\sin x \cdot \cos y - 1, \\ \sin(x+y) = -2\cos x \cdot \sin y. \end{cases}$$

662. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1.$$

663. Доказать, что

$$\lim_{x \to a} \left(\sin \frac{x-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right) = -\frac{a}{\pi}.$$

664. Доказать, что если A, B и C являются углами треугольника, то числа $\cos^2 \frac{A}{2}$, $\cos^2 \frac{B}{2}$, $\cos^2 \frac{C}{2}$ служат длинами сторон некоторого треугольника.

665. Внутри прямого кругового конуса расположен куб так, что одно ребро куба лежит на диаметре основания конуса; вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, а центр куба лежит на высоте конуса. Найти отношение объема конуса к объему куба.

Задание 45

666. Решить неравенство

$$2\log_2(x-1)-\log_2(2x-4)>1.$$

667. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}2y,\\ 2\sin x\cdot\cos(x-y)=\sin y.\end{cases}$$

668. Решить неравенство $\log_x|x^2-1|>0$.

669. Решить неравенство

$$\frac{5-4\cdot(\sin^2 x+\cos x)}{\cos x}\leqslant 0.$$

670. Доказать, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

671. Доказать, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=2.$$

672. Доказать, что в любом треугольнике имеет место равенство

$$\sqrt{a\cdot\sin A}+\sqrt{b\cdot\sin B}+\sqrt{c\cdot\sin C}=$$
$$=\sqrt{2p(\sin A+\sin B+\sin C)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — противоположные им углы и p — полупериметр треугольника.

673. Доказать, что если a, b, c соответственно длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, то имеет место равенство

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cdot\cos A+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cdot\cos B+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot\cos C=3.$$

674. В данную пирамиду вписать призму наибольшего объема (одно основание призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а другое — параллельное сечение пирамиды).

675. Котел состоит из цилиндра, завершенного двумя полусферами. Определить размеры котла, чтобы при данном объеме V его поверхность была наименьшей.

Семинар 46

676. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos 2y + \sin y \cdot \cos 2x + 2\cos x = 1, \\ \cos 2x + 3\cos 2y + 8\sin y = 8 + 4\sin x \cdot \cos y. \end{cases}$$

677. Решить неравенство

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} > 2.$$

678. Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

679. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, который имеет наибольшую сумму квадратов сторон.

680. Найти наименьший из всех объемов конусов, описанных около шара радиуса r.

Задание 46

681. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos 2y + \sin y \cdot \cos 2x + \sin y = 1, \\ 2\cos 2x + 8\cos x \cdot \cos y + 7 = 4\sin y. \end{cases}$$

682. Найти все действительные пары чисел x, y, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 4x \cdot \cos(xy) + 4 = 0$.

683. Решить неравенство

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < \frac{1}{2}.$$

684. Решить неравенство

$$1 - \frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} < \frac{1}{3 - 4\cos^2 x}$$

на интервале $(0, \pi)$.

685. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

686. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha^n}{(\sin\alpha)^m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m;\\ \infty, & \text{если } n<m;\\ 1, & \text{если } n=m,\end{cases}$$

где n и m — натуральные числа, $\alpha>0$.

687. На одной стороне прямого угла задан отрезок AB. Найти на другой стороне точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом θ.

688. Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$, где a, b, c длины сторон, а S — площадь треугольника.

689. Доказать, что из всех сечений куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящих через диагональ (BD_1), имеет наименьшую площадь то, которое проходит через середину (E) ребра (AA_1), скрещивающегося с этой диагональю (BD_1).

690. Доказать, что если в данный конус вписать цилиндр наибольшего объема, то радиус основания цилиндра относится к радиусу основания конуса, как 2 : 3.

Семинар 47

691. Доказать, что уравнение $x^2-x\cdot\sin(xy)+1=0$ не имеет решений.

692. Решить неравенство

$$\frac{\sin x-2}{4\sin^2 x-1}>2.$$

693. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

694. Доказать, что если P, Q, R суть соответственно точки пересечения сторон BC, CA, AB (или их продолжений) треугольника ABC с некоторой прямой, то имеет место соотношение

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB}=1.$$

695. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, тот цилиндр имеет наибольшую боковую поверхность, у которого осевое сечение есть квадрат.

Задание 47

696. Найти все пары чисел x, y, при которых выполняется уравнение

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

697. Найти все пары чисел x, y, при которых выполняется уравнение

$$\sin^2 x-2\sin x\cdot\sin y-3\cos^2 y+\cos^4 y+2=0.$$

698. Решить неравенство

$$(\operatorname{arctg} x)^2-4\operatorname{arctg} x+3>0.$$

699. Решить неравенство

$$\arcsin(x^2-2x-2)>\frac{\pi}{4}.$$

700. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

701. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right]=1.$$

702. На стороне CA треугольника ABC отложен отрезок $CE<CA$, а на продолжении AB — отрезок $BD=CE$. Доказать, что отрезок DE делится стороной BC в отношении, обратном отношению сторон AB и AC.

703. Пусть AB — диаметр некоторой окружности, CMD — другая окружность с центром в точке A, пересекающая первую окружность в точках C и D; точка M — произвольная точка второй окружности; N, P, Q — точки, в которых прямые BM, CM, DM пересекают соответственно первую окружность. Доказать, что $MPBQ$ — параллелограмм. Также доказать, что MN — средняя пропорциональная величина между NC и ND.

704. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный конус, тот цилиндр имеет наибольшую боковую

поверхность, у которой высота равна половине высоты данного конуса.

705. Доказать, что если в данный шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема, то отношение радиуса основания цилиндра к радиусу шара равно отношению $\sqrt{2}$ к $\sqrt{3}$.

Семинар 48

706. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

707. Решить неравенство

$$\sin|\lg x| + \cos|\lg x| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

708. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + (x+3)^{10} + \cdots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} = 100.$$

709. Доказать, что произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, опущенной на третью сторону, и диаметра описанного круга.

Задание 48

710. Доказать, что если в данный шар вписан конус наибольшего объема, то радиус шара относится к высоте конуса, как 3 : 4.

711. Решить неравенство

$$\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}.$$

712. Решить неравенство

$$4\sin x \cdot \sin 3x < 1.$$

713. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\sin^2 x + 2\sin^2 y + \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^2 y =$$
$$= 2\left(\sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\sin y + \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y\right).$$

714. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2 (x + y).$$

715. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1}\right) = \frac{2}{3}.$$

716. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}.$$

717. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (K и M находятся по одну сторону от хорды AB), Q — точка пересечения AB и KN, P — точка пересечения AB и ML. Доказать, что $QC = CP$.

718. По окружности радиуса $2R$ катится (без скольжения) внутри другая окружность радиуса R. Найти множество точек, которое описывает точка M, принадлежащая меньшей окружности.

719. Какую наибольшую полную поверхность может иметь прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна a?

720. На какой высоте над круглым столом надо поместить лампу, чтобы она проектировалась в центр стола и чтобы на краях стола была наибольшая освещенность?

РЕШЕНИЯ

1. Обозначим через x число монет достоинством в 15 коп. и через y — число монет достоинством в 20 коп., которые были у школьника. В силу условия задачи должно быть $x<y$. Известно, что за билет в кино школьник заплатил две монеты, т. е. не менее 30 коп.; за обед он уплатил в два раза дороже, чем за билет в кино, так как за билет в кино он уплатил 1/5 всех своих денег, а за обед 2/5 всех своих денег. Следовательно, за обед он уплатил не менее 60 коп. Но так как за обед он отдал три монеты, то обед стоит ровно 60 коп. Значит, за билет он истратил 30 коп. После того, как школьник оплатил билет в кино и обед, у него осталось 60 коп. Эти 60 коп. могут составить 4 монеты достоинством в 15 коп. или 3 монеты достоинством в 20 коп. Если бы у него остались 4 монеты достоинством в 15 коп. каждая, то вначале у него было бы 6 монет достоинством в 15 коп. и 3 монеты достоинством в 20 коп., т. е. $x>y$, что противоречит условию ($x<y$). Таким образом, у школьника 3 монеты достоинством в 20 коп. Итак, у школьника вначале было 2 монеты достоинством в 15 коп. и 6 монет достоинством в 20 коп.

2. Левую часть доказываемого равенства перепишем так

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt{4-3}=1.$$

3. Пусть $x-3=y$, $x-2=z$, тогда $2x-5=y+z$. В силу наших обозначений данное уравнение принимает вид

$$y^4+z^4-(y+z)^4=0$$

или после преобразований

$$yz(2y^2+3yz+2z^2)=0.$$

Последнее уравнение разбивается на три уравнения

$$2y^2 + 3yz + 2z^2 = 0, \qquad (1)$$

$$y = 0,$$

$$z = 0.$$

Рассматривая уравнение (1) как квадратное относительно y (или относительно z), убеждаемся, что оно не имеет действительных корней, если $y \neq 0$, $z \neq 0$. Если $y=0$, т. е. $x-3=0$, то $x=3$, а если $z=0$, т. е. $x-2=0$, то $x=2$. Итак, данное уравнение имеет только два действительных корня.

4. Имеем $2n^3+3n^2+7n = n^3-n+n^3+3n^2+2n+6n = n(n^2-1)+n(n^2+3n+2)+6n = (n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)+6n$. Так как $6n$ кратно шести, а также $(n-1)n(n+1)$ и $n(n+1)(n+2)$ тоже делятся на 6, как произведения трех последовательных целых чисел, то данное выражение делится на 6.

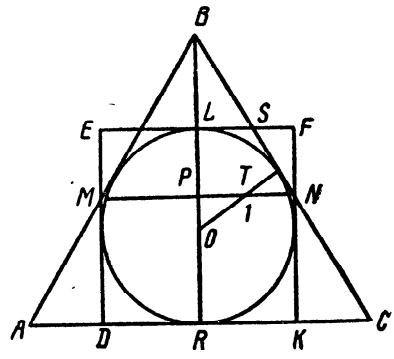

Рис. 1

5. Пусть ABC и $DEFK$ равносторонний треугольник и квадрат, описанные около окружности радиуса 1 (рис. 1) и пусть DK принадлежит AC, T — точка касания BC к окружности, M — точка пересечения AB и DE, N — точка пересечения FK и BC, L — точка пересечения EF с высотой BR треугольника ABC, P — точка пересечения BR и MN, S — точка пересечения BC и EF.

Так как все три фигуры симметричны относительно BR, то нам надо найти удвоенную площадь пятиугольника $RLSNK$, который состоит из прямоугольника $RPNK$ и прямоугольной трапеции $PLSN$. Поскольку радиус OT равен 1, то из прямоугольного треугольника BOT ($\angle OBT = 30°$) следует, что $BO=2$, а потому $BL=1$. Из прямоугольного треугольника BLS находим $LS = BL \cdot \operatorname{ctg} 60° = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, а следовательно, и $ST = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Из прямоугольного треугольника BOT получаем $BT = BO \cdot \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника BPN следует, что $BN = 2 \cdot PN = 2 \cdot 1 = 2$. Следовательно, $TN = BN - BT = 2 - \sqrt{3}$, а потому $NK = 2 - \sqrt{3} + 1 = 3 - \sqrt{3}$ и $PL = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$, $PR = 2 - (\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$. Искомая площадь равна

$$2\cdot\left(PN\cdot PR+\frac{PN+LS}{2}\cdot PL\right)=2\left[1\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]=6-\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

6. Если стоимость портфеля, авторучки и книги равна соответственно x, y и z (в рублях), то в силу условия задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2{,}5}=8,\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12.\end{cases}$$

После упрощений эта система принимает вид

$$\begin{cases}2x+5y+4z=80,\\ 6x+3y+4z=144.\end{cases}\qquad(1)$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$x+y+z=28.\qquad(2)$$

Следовательно, вся покупка стоила 28 руб. Теперь, вычитая почленно из первого уравнения системы второе уравнение, получим

$$2x-y=32.\qquad(3)$$

Предположим, что $y\geqslant x$. Перепишем уравнение (3) в таком виде

$$x=32+y-x$$

Так как по предположению $y-x\geqslant 0$, то $x\geqslant 32$, что противоречит уравнению (2). Следовательно, рассмотренный случай невозможен. Таким образом, остается только, что $x>y$, т. е. портфель дороже авторучки.

Отв. Вся покупка стоит 28 руб.; портфель дороже авторучки.

7. Занумеруем мешочки числами от 1 до 10. Возьмем из первого мешка 1 монету, из второго — 2 монеты, ..., из десятого — 10 монет и определим их общий вес. Пусть их общий вес есть Q *г*. Если бы все монеты были настоящие, то они весили бы $10+20+30+\ldots+100=550$ *г*. Избыток $Q-550$ совпадает, очевидно, с номером мешочка, в котором находятся фальшивые монеты.

8. Имеем

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)}=$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} =$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{2}-1)} =$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2},$$

что и требовалось доказать.

9. Первое решение. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3} = \frac{\sqrt[4]{3}-1}{(\sqrt[4]{3}-1)\cdot(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3)} =$$
$$= \frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3+3\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{27}-3} =$$
$$= \frac{\sqrt[4]{3}-1}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{(\sqrt[4]{3}-1)\cdot\sqrt[4]{27}}{2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}} = \frac{(\sqrt[4]{3}-1)\cdot\sqrt[4]{27}}{6}.$$

Второе решение. Заметим, что $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[4]{27}$, 3 есть геометрическая прогрессия, первый член которой $\sqrt[4]{3}$ и знаменатель также $\sqrt[4]{3}$. Поэтому левую часть доказываемого равенства можно переписать в виде

$$\frac{\sqrt[4]{3}-1}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{27}\cdot(\sqrt[4]{3}-1)}{6}.$$

10. Перепишем данное уравнение в виде

$$\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^4+\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^4=17.$$

Пусть $x-\frac{5}{2}=y$. Тогда имеем

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^4+\left(y+\frac{1}{2}\right)^4=17,$$

или

$$16y^4+24y^2-135=0.$$

Это уравнение имеет лишь два действительных корня $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-\frac{3}{2}$. Таким образом, $x_1=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$, $x_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$.

11. Ясно, что $x\neq 0$, а потому, поделив обе части данного уравнения на x^2, получим равносильное данному уравнение

$$x^2+x-10+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Таким образом, имеем

$$y^2+y-12=0,$$

откуда $y_1=3$, $y_2=-4$. Итак, данное уравнение разбивается на два

$$x+\frac{1}{x}=3 \text{ и } x+\frac{1}{x}=-4.$$

Из первого уравнения находим $x_{1;2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, а из второго получаем $x_{3;4}=-2\pm\sqrt{3}$.

12. Заметим, что $a^3-a=(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$ делится на 6, как произведение трех последовательных целых чисел. Следовательно, $(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$ кратно шести. Пусть $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)=6k$, а $a+b+c=6l$. Поэтому $a^3+b^3+c^3=6(k+l)$, т. е. $a^3+b^3+c^3$ делится на 6.

13. Имеем $n^4+3n^3-n^2-3n=n(n^3-n+3n^2-3)=n[n(n^2-1)+3(n^2-1)]=(n-1)\cdot n(n+1)\cdot(n+3)$.

Так как выражение $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ есть произведение трех последовательных чисел, то оно делится на 6, а потому и рассматриваемое выражение делится на 6.

14. Пусть треугольник ABC (рис. 2) имеет площадь S, а площадь треугольника KBM равна Q. Три вершины четырехугольника совпадают с точками K, B и M; четвертую же вершину L можно взять на стороне AC произвольно. В самом деле, площадь S_1 четырехугольника $LKBM$ есть сумма площади Q треугольника KBM и площади треугольника KLM, а последняя не меняется при движении вершины L по прямой AC, параллельной основанию KM. Пусть высота BE треугольника ABC, где точка E принадлежит AC. Поместив точку L в точке E, получим четырехугольник $KBME$, диагонали которого взаимно перпендикулярны; поэтому $S_1=\frac{1}{2}KM\cdot BE$. И поскольку $Q=\frac{1}{2}KM\cdot BD$, то $\frac{S_1}{Q}=\frac{BE}{BD}$. Но из подобия треугольников ABC и KBM следует, что $\frac{S}{Q}=\frac{BE^2}{BD^2}$. Следовательно,

$$S_1=Q\cdot\frac{BE}{BD}=Q\cdot\sqrt{\frac{S}{Q}}=\sqrt{S\cdot Q}.$$

При решении задачи мы взяли за четвертую вершину L точку E. Если же точка L не совпадает с точкой E, то будем решать так:

$$S_1 = \frac{1}{2} KM \cdot BD + \frac{1}{2} KM \cdot NL = \frac{1}{2} KM\,(BD + NL) =$$

$$= \frac{1}{2} KM \cdot BE,$$

и дальше, как и при первом положении вершины L.

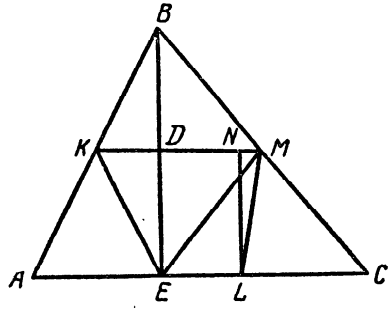

Рис. 2

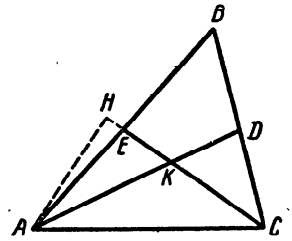

Рис. 3

15. Пусть K — точка пересечения медиан AD и CE (рис. 3). По условию

$$\angle KAC + \angle KCA = 60°,$$

поэтому

$$\angle AKE = \angle KAC + \angle KCA = 60°.$$

Проведем высоту AH треугольника AKE. Поскольку

$$\angle HAK = 90° - \angle AKE = 30°,$$

то

$$HK = \frac{1}{2} AK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AD = \frac{1}{3} m_a.$$

Поэтому

$$AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} AD\right)^2 - HK^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3} m_a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} m_a\right)^2} = \frac{m_a}{\sqrt{3}}.$$

Площадь треугольника ACE равна

$$\frac{1}{2} EC \cdot AH = \frac{1}{2} m_c \cdot \frac{m_a}{\sqrt{3}} = \frac{m_a \cdot m_c}{2\sqrt{3}}.$$

Но по условию $m_a \cdot m_c = \sqrt{3}$, следовательно, площадь треугольника ACE равна 1/2. Площадь же треугольника ABC, очевидно, вдвое больше площади треугольника AEC (так как $AE = \frac{AB}{2}$, а высота этих треугольников, опущенная из вершины C, общая), т. е.

$$S_{\Delta ABC} = 1.$$

16. Известно, что часовая стрелка делает два оборота за сутки, а минутная — 24. Отсюда следует, что минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза в течение суток и каждый раз образует по два прямых угла. Таким образом, за сутки стрелки образуют между собой прямые углы $22 \cdot 2 = 44$ раза.

Отв. 44 раза.

17. Пусть $a = \sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$, а $b = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Следовательно,

$$a^2 = 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15};$$

$$b^2 = 2 + 3 + 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}.$$

Таким образом, $a^2 = b^2$. Поскольку a и b положительные числа, то из равенства $a^2 = b^2$ следует равенство $a = b$, что и требовалось доказать.

18. Поскольку $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b)+6abc$, то данное уравнение перепишется в виде

$$x^3 - (a+b)x^2 - (a-b)^2 x + (a-b)^2 \cdot (a+b) = 0,$$

или

$$x^2(x-a-b) - (a-b)^2(x-a-b) = 0,$$

$$(x-a-b)[x^2 - (a-b)^2] = 0,$$

$$(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b) = 0.$$

Следовательно,

$$x - a - b = 0, \quad x + a - b = 0, \quad x - a + b = 0,$$

откуда

$$x_1 = a + b, \quad x_2 = b - a, \quad x_3 = a - b.$$

19. Если число a кратно 2, то число $N = 4a^2+3a+5$ не делится на 2; поэтому N не делится и на 6. Если a кратно 3, то число $N = 4a^2+3a+5$ также не кратно 3; поэтому число N не делится и на 6. Итак, мы доказали необходимость условия.

Очевидно, что любое целое число можно представить в одном из следующих видов:

$$6k \text{ или } 6k \pm 1 \text{ или } 6k \pm 2 \text{ или } 6k + 3.$$

Поскольку число a не кратно 2 и 3, то число a имеет лишь вид $6k\pm1$. Таким образом,

$$N = 4(6k \pm 1)^2 + 3(6k \pm 1) + 5 = 144k^2 \pm 48k + 18k + \\ + (9 \pm 3).$$

Каждое из четырех слагаемых делится на 6, а потому и число N делится на 6. Итак, мы доказали и достаточность условия.

20. Пусть точка O — ортоцентр треугольника ABC (рис. 4), высота $AA_1=3$ *см*, высота $CC_1=2\sqrt{2}$, $BO : OB_1=5 : 1$. Введем обозначения $OA_1=x$, $OC_1=y$, $OB=5z$, $OB_1=z$. Из подобных треугольников OAC_1 и OA_1C следует, что

$$x(3-x) = y\left(2\sqrt{2} - y\right).$$

Если S — площадь треугольника ABC, то площади треугольников BOC, AOB, AOC соответственно равны $\frac{x}{3}S$, $\frac{y}{2\sqrt{2}}S$, $\frac{1}{6}S$. Так как сумма площадей треугольников BOC, AOB, AOC равна площади треугольника ABC, т. е.

$$\frac{x}{3}S + \frac{y}{2\sqrt{2}}S + \frac{1}{6}S = S, \text{ то}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6} = 1.$$

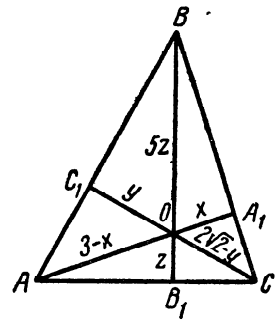

Рис. 4

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x(3-x) = y\left(2\sqrt{2} - y\right), \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{6} = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы перепишем в виде $4x+3y\sqrt{2}=10$. Отсюда

$$x = \frac{10 - 3y\sqrt{2}}{4}; \quad 3 - x = \frac{2 + 3y\sqrt{2}}{4}.$$

Подставляя найденные значения x и $3-x$ в первое уравнение системы, получим

$$20 + 24y\sqrt{2} - 18y^2 = 32y\sqrt{2} - 16y^2,$$

или

$$y^2 + 4y\sqrt{2} - 10 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $y=\sqrt{2}$. Подставляя $y=\sqrt{2}$ в любое уравнение системы, найдем $x=1$. Из подобия треугольников

AOB_1 и A_1OB следует, что $OB_1 \cdot OB = OA_1 \cdot AO$, или $z \cdot 5z = x \cdot (3-x)$, или $5z^2 = 1 \cdot 2 = 2$, откуда $z^2 = \frac{2}{5}$. Из прямоугольного треугольника A_1OB имеем $A_1B^2 = (5z)^2 - x^2$, откуда, $A_1B = 3$.

Из прямоугольного треугольника A_1OC следует, что $A_1C^2 = (2\sqrt{2}-y)^2 - x^2 = 2 - 1 = 1$, откуда $A_1C = 1$.

Далее, $BC = A_1B + A_1C = 3 + 1 = 4$.

Площадь треугольника ABC

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

Отв. 6 *см*^{2}.

21. Если обозначить через x число минутных делений, которые пройдет часовая стрелка до встречи с минутной стрелкой, то минутная стрелка за это же время пройдет $(x+45)$ минутных делений. Но так как минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, то $12x = 45 + x$. Отсюда $x = 4\frac{1}{11}$ минутных делений.

Отв. $49\frac{1}{11}$.

22. Время, за которое собака делает два скачка, т. е. преодолевает 4 *м*, лисица делает 3 скачка, т. е. преодолевает 3 *м*. Следовательно, за это время расстояние между ними сокращается на 1 *м*. Начальное расстояние между собакой и лисицей равно 30 *м*, поэтому собака догонит лисицу на расстоянии 120 *м* от точки A.

Отв. 120 *м*.

23. Пусть $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = x$. Возведя обе части этого равенства в третью степень, получим

$$2+\sqrt{5} + 2-\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} \times \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) = x^3,$$

или

$$4 - 3x = x^3, \text{ или } x^3 + 3x - 4 = 0, \text{ т. е. } (x-1)(x^2+x+4) = 0. \quad (1)$$

Так как уравнение $x^2+x+4=0$ не имеет действительных корней, то уравнение (1) имеет единственный действительный корень, равный 1. Следовательно, утверждение задачи верно.

24. Первое решение. Пусть $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x$. Возведя обе части этого равенства в третью степень, получим

$$20+14\sqrt{2} + 20-14\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{20^2-(14\sqrt{2})^2} \cdot x = x^3,$$

или

$$40 + 6x = x^3; \; x^3 - 6x - 40 = 0; \; (x-4)(x^2+4x+10) = 0.$$

Так как уравнение $x^2+4x+10=0$ не имеет действительных корней, то уравнение $x^3-6x-40=0$ имеет лишь один действительный корень, равный 4. Таким образом, утверждение задачи верно.

Второе решение. Так как

$$20+14\sqrt{2}=8+12\sqrt{2}+12+\sqrt{8}=\left(2+\sqrt{2}\right)^3,$$

а

$$20-14\sqrt{2}=8-12\sqrt{2}+12-\sqrt{8}=\left(2-\sqrt{2}\right)^3,$$

то левую часть доказываемого равенства можно переписать в виде

$$\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4,$$

что и требовалось доказать.

25. Первое решение. Введем обозначения $u=x^2+2mx-m^2$, $v=x^2-2mx-m^2$. Из условия следует, что $u>v$ и $u>0$, $v\geqslant 0$. В силу наших обозначений решаемое уравнение перепишется в виде $\sqrt{u}-\sqrt{v}=1$, или $\sqrt{u}=1+\sqrt{v}$, или $u-v-1=2\sqrt{v}$, т. е.

$$(x^2+2mx-m^2)-(x^2-2mx-m^2)-1=2\sqrt{v},$$

или

$$4mx-1=2\sqrt{v},\quad (4mx-1)^2=4v=4(x^2-2mx-m^2),$$

$$1+4m^2=4x^2(1-4m^2). \qquad (1)$$

Поскольку левая часть последнего равенства положительна, то должно быть $1-4m^2>0$, откуда $m<\frac{1}{2}$. Итак, $0<m<\frac{1}{2}$. Поскольку $u>v$, т. е. $4mx>0$, то $x>0$. Теперь ясно, что из (1) получаем $x=$ $=+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+4m^2}{1-4m^2}}$. Произведенные нами операции могли привести к приобретению корней, поэтому найденное значение нуждается в проверке, что предлагается сделать читателю.

Второе решение. Так как $x^2+2mx-m^2>x^2-2mx-m^2$, то $4mx>0$, и поскольку $m>0$, то $x>0$.

Умножая обе части данного уравнения на сумму

$$\sqrt{x^2+2mx-m^2}+\sqrt{x^2-2mx-m^2},$$

получим

$$\sqrt{x^2+2mx-m^2}+\sqrt{x^2-2mx-m^2}=4mx.$$

Складывая это уравнение с данным, получаем

$$2\sqrt{x^2+2mx-m^2}=4mx+1,$$

или

$$4x^2+8mx-4m^2=16m^2x^2+8mx+1,$$

т. е.

$$4(1-4m^2)x^2=1+4m^2.$$

Отсюда

$$x = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+4m^2}{1-4m^2}}.$$

Ясно, что должно иметь место неравенство $1-4m^2>0$, т. е. $m<\frac{1}{2}$.

26. Если $x\leqslant 0$, то $|x|=-x$, $|x-1|=1-x$, $|x-2|=2-x$. Следовательно, в этом случае данное уравнение имеет вид $-3x+3=a$. Отсюда $x=\frac{3-a}{3}$. Так как должно быть $x\leqslant 0$, то $a\geqslant 3$.

Если $0\leqslant x\leqslant 1$, то $|x|=x$, $|x-1|=1-x$, $|x-2|=2-x$, а потому данное уравнение перепишется в виде $-x+3=a$. Отсюда $x=3-a$. В этом случае должно быть $0\leqslant 3-a\leqslant 1$, или $2\leqslant a\leqslant 3$.

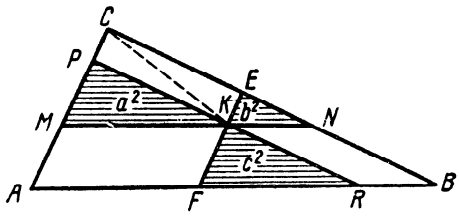

Рис. 5

Если $1\leqslant x\leqslant 2$, то $|x|=x$, $|x-1|=x-1$, $|x-2|=2-x$, а потому данное уравнение принимает вид $x+1=a$. Отсюда $x=a-1$. В этом случае должно быть $1\leqslant a-1\leqslant 2$, или $2\leqslant a\leqslant 3$.

Если $x\geqslant 2$, то данное уравнение перепишем так: $3x-3=a$. Отсюда $x=\frac{a+3}{3}$. Должно быть $\frac{a+3}{3}\geqslant 2$, или $a\geqslant 3$. Итак,

если $a\geqslant 3$, то $x_1=\frac{3-a}{3}$, $x_2=\frac{3+a}{3}$;

если $2\leqslant a\leqslant 3$, то $x_1=3-a$, $x_2=a-1$;

если $a<2$, то уравнение не имеет решений.

27. Первое решение. Надо доказать, что $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n$ делится на 9. Поскольку любое целое число можно представить или в виде $3k$, или $3k+1$, или $3k+2$, то задача сводится к доказательству, что каждое из трех выражений $3(3k)^3+6\cdot 3k=9k(9k^2+2)$, $3(3k+1)^3+6(3k+1)=9(3k+1)(3k^2+2k+1)$, $3(3k+2)^3+6(3k+2)=9(3k+2)(3k^2+4k+2)$ делится на 9. Последнее очевидно.

Второе решение. Имеем $3n^3+6n=3n^3-3n+9n=3(n-1)n(n+1)+9n$. Так как произведение трех последовательных целых чисел кратно трем, то произведение $3(n-1)n(n+1)$ делится на 9. Следовательно, утверждение задачи верно.

28. Ясно, что 43^4 оканчивается той же цифрой, что и 3^4. Далее, $43^{43}=43^{40}\cdot 43^3=(43^4)^{10}\cdot 43^3$, $(43^4)^{10}$ оканчивается цифрой 1; 43^3 окан-

чивается цифрой 7, значит, 43 оканчивается на 7. Число 7^4 оканчивается цифрой 1; $7^{16}=(7^4)^4$ оканчивается цифрой 1; 7^{17} оканчивается цифрой 7, поэтому 17^{17} оканчивается цифрой 7. Таким образом, $43^{43}-17^{17}$ оканчивается цифрой 0 (7—7=0), следовательно, $43^{43}-17^{17}$ делится на 10.

29. Первое решение. Очевидно, что полученные треугольники и основной треугольник подобны (рис. 5). Обозначим площадь треугольника ABC через x.

Так как площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон, то из подобия треугольников ABC и MPK имеем

$$\frac{a^2}{x}=\frac{MK^2}{AB^2}, \text{ или } \frac{a}{\sqrt{x}}=\frac{MK}{AB}.$$

Аналогично из подобия треугольников ABC и ENK следует, что

$$\frac{b}{\sqrt{x}}=\frac{KN}{AB},$$

а из подобия треугольников ABC и KFR получаем, что

$$\frac{c}{\sqrt{x}}=\frac{FR}{AB}.$$

Имеем

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{x}}=\frac{MK+KN+FR}{AB}. \qquad (1)$$

Из рисунка видим, что

$$MK=AF,\ KN=RB,$$

поэтому

$$AB=MK+KN+FR. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{x}}=\frac{AB}{AB}=1,$$

или

$$a+b+c=\sqrt{x},$$

откуда

$$x=(a+b+c)^2$$

Второе решение. Проведем отрезок KC. Так как площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон, то $MP:KE=a:b$, или $MP:PC=a:b$. Учитывая, что треугольники MKP и PKC имеют общую высоту, опущенную из вершины K, находим

$$S_{\triangle MPK}:S_{\triangle PCK}=MP:PC=a:b,$$

т. е.

$$S_{\triangle CPK} = S_{\triangle MPK} \cdot \frac{b}{a} = a^2 \cdot \frac{b}{a} = ab.$$

Отсюда следует, что площадь параллелограмма $PCEK$ равна $2ab$. Аналогично находим, что площадь параллелограмма $KNBR$ равна $2bc$, а площадь параллелограмма $AMKF$ равна $2ac$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2.$$

Отв. $(a+b+c)^2$.

30. Обозначим сторону ромба через y, а меньшую его диагональ через x. Следовательно,

$$x^2 + a^2 = 4y^2,$$

откуда

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + a^2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, мы можем рассматривать x как сторону правильного двенадцатиугольника, вписанного в круг радиуса y, т. е.

$$x = y\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$x = a\left(2 - \sqrt{3}\right), y = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Высота h ромба, т. е. одна из сторон прямоугольника, вписанного в ромб, определится из равенства

$$\frac{xa}{4} = \frac{yh}{2},$$

откуда

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Другая сторона прямоугольника z определяется из равенства

$$z^2 = x^2 - h^2,$$

откуда

$$z = \frac{a}{2}\sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^3}.$$

Искомая площадь

$$S = h \cdot z = \left[\frac{a}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)\right]^2.$$

31. Если принять за 1 урожай за год, предшествовавший первому, то урожай первого года будет составлять $1 + \frac{a}{100}$. Урожай второго года будет равен

$$1+\frac{a}{100}+\left(1+\frac{a}{100}\right)\cdot\frac{b}{100}=\left(1+\frac{a}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{100}\right).$$

Если обозначим через x процент прироста урожая за третий год, то за третий год прирост урожая будет равен

$$\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}.$$

Следовательно, в силу условия задачи, средний годовой прирост урожая за три года составит

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a}{100}+\left(1+\frac{a}{100}\right)\cdot\frac{b}{100}+\left(1+\frac{a}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}\right]=\frac{c}{100}.$$

Отсюда легко найти x.

Отв.

$$\frac{3c-a-b-\dfrac{ab}{100}}{\left(1+\dfrac{a}{100}\right)\left(1+\dfrac{b}{100}\right)}\%.$$

32. Имеем

$$\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2+1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2+x\sqrt{1+x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

33. Введя обозначения $\sqrt[3]{2-x}=u$, $\sqrt[3]{7+x}=v$, получим

$$u^2-uv+v^2=3,\quad u^3=2-x,\quad v^3=7+x.$$

Сложив последние два равенства, получим $u^3+v^3=9$. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 3, \\ u^3 + v^3 = 9, \end{cases}$$

или равносильную ей систему

$$\begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 3, \\ u + v = 3. \end{cases}$$

Из этой системы имеем $u_1 = 2$, $u_2 = 1$. Так как $2 - x = u^3$, то имеем два уравнения $2 - x = 8$ и $2 - x = 1$.
Отсюда $x_1 = -6$, $x_2 = 1$.

34. Имеем $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = n^4 - n^2 + 2n^3 - 2n + 4n^2 + 4n = n^2(n^2 - 1) + 2n(n^2 - 1) + 2n(2n + 2) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 2n(2n + 2)$.

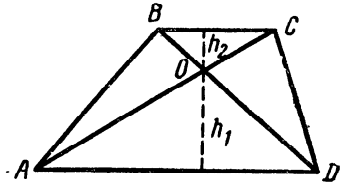

Рис. 6

Поскольку выражение $(n-1)n(n+1)(n+2)$ делится на 24, как произведение четырех последовательных целых чисел, то оно делится на 8. Число $2n(2n+2)$ также делится на 8, как произведение двух последовательных четных чисел. В силу изложенного данное выражение делится на 8.

35. Первое решение. Пусть высоты треугольников AOD и BOC соответственно равны h_1 и h_2, тогда площадь трапеции (рис. 6)

$$S = \frac{AD + BC}{2}(h_1 + h_2) = p^2 + q^2 + \frac{AD \cdot h_2 + BC \cdot h_1}{2}.$$

Но из подобия треугольников AOD и BOC следует, что

$$AD \cdot h_2 = BC \cdot h_1.$$

Поэтому

$$S = p^2 + q^2 + AD \cdot h_2. \qquad (1)$$

Далее имеем, что $\frac{p^2}{q^2} = \frac{AD^2}{BC^2}$, откуда $AD = \frac{BC \cdot p}{q}$ и

$$AD \cdot h_2 = \frac{BC \cdot h_2 \cdot p}{q} = \frac{2q^2 \cdot p}{q} = 2pq. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) имеем

$$S = p^2 + q^2 + 2pq = (p + q)^2.$$

Второе решение. Рассмотрим подобные треугольники AOD и BOC. Находим, что их коэффициент подобия равен $\sqrt{\frac{p^2}{q^2}} = \frac{p}{q}$, т. е.

$$AD:BC = AO:OC = DO:OB = \frac{p}{q}.$$

Так как высоты треугольников BOC и DOC, опущенные из вершины C, совпадают, то

$$S_{\triangle DOC}:S_{\triangle BOC}=DO:OB=\frac{p}{q},$$

т. е.

$$S_{\triangle DOC}=\frac{p}{q}\cdot S_{\triangle BOC}=\frac{p}{q}\cdot q^2=pq.$$

Аналогично

$$S_{\triangle AOB}=pq.$$

Таким образом, площадь трапеции равна

$$p^2+q^2+pq+pq=(p+q)^2.$$

36. Пусть сплав содержит x *кг* серебра и y *кг* меди. Сплавив его с 3 *кг* чистого серебра, получим в силу условия задачи

$$\frac{x+3}{x+y+3}=0{,}900, \tag{1}$$

а сплавив его с 2 *кг* 900-й пробы, получим (в новом сплаве) чистого серебра $(2\cdot 0{,}900+x)$ *кг*, а общий его вес составит $(x+y+2)$ *кг*, а потому

$$\frac{x+1{,}8}{x+y+2}=0{,}840. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим $x=2{,}4$ *кг*, $y=0{,}6$ *кг*. Весь сплав $x+y=3$ *кг*, а его проба равна $\frac{2{,}4}{3}=0{,}8$.

Отв. 3 *кг*; 0,8.

37. Пусть x — первоначальное количество спирта в каждом из сосудов. После первого отливания в первом сосуде осталось $(x-a)$ *л* спирта. После того как в сосуд добавили a *л* воды, крепость спирта, т. е. отношение объема спирта в первом сосуде к объему смеси спирта с водой, стала равной $\frac{x-a}{x}$. Во второй раз из первого сосуда отлили a *л*, в которых содержалось $\frac{(x-a)\,a}{x}$ *л* спирта и, следовательно, в первом сосуде осталось

$$x-a-\frac{(x-a)\,a}{x}=\frac{(x-a)^2}{x}\ л \text{ спирта.}$$

Теперь крепость смеси в первом сосуде стала равной $\frac{(x-a)^2}{x^2}$.

После того как из второго сосуда отлили $2a$ *л* спирта, в нем осталось $(x-2a)$ *л* спирта, и когда второй сосуд дополнили $2a$ *л* воды, то крепость смеси стала равной $\frac{x-2a}{x}$. Во второй раз из второго

сосуда отлили $2a$ *л* смеси, содержащей $\frac{(x-2a)\,2a}{x}$ *л* спирта, и в нем осталось $x-2a-\frac{(x-2a)\,2a}{x}=\frac{(x-2a)^2}{x}$ *л* спирта. Теперь крепость смеси во втором сосуде оказалась равной $\frac{(x-2a)^2}{x^2}$.

В силу условия задачи составляем уравнение

$$\frac{(x-a)^2}{x^2}:\frac{(x-2a)^2}{x^2}=\frac{25}{16},$$

или

$$9x^2-68ax+84a^2=0.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1=6a$, $x_2=\frac{14a}{9}$. Поскольку $x_2-2a=\frac{14a}{9}-2=-\frac{4a}{9}<0$, то $x=\frac{14a}{9}$ не служит решением данной задачи. Следовательно, имеем лишь $x=6a$, а потому $\frac{a}{x}=\frac{1}{6}$, т. е. a *л* составляет $\frac{1}{6}$ объема сосуда.

Отв. $\frac{1}{6}$.

38 Условие задачи перепишем в виде $2ac=b(a+c)$. Из равенства $2b^2=2b^2$ вычтем почленно равенство $2ac=b(a+c)$. Имеем

$$2b^2-2ac=2b^2-b(a+c)=2b^2-2b(a+c)+2ac,$$

или

$$b^2+ab-bc-ac+b^2-ab+bc-ac=2(b^2-ab-bc+ac),$$
$$b(a+b)-c(a+b)+b(b-a)+c(b-a)=2[b(b-a)-c(b-a)],$$
$$(b+a)(b-c)+(b-a)(b+c)=2(b-a)(b-c).$$

Поделив обе части последнего равенства на $(b-a)(b-c)$, получим $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2$, что и требовалось доказать.

39. Условие задачи перепишем в виде $b=\frac{2ac}{a+c}$. Следовательно,

$$\frac{b}{2}=\frac{ac}{a+c},\quad a-\frac{b}{2}=\frac{a^2}{a+c},\quad c-\frac{b}{2}=\frac{c^2}{a+c}.$$

Очевидно, что

$$\left(\frac{ac}{a+c}\right)^2=\frac{a^2}{a+c}\cdot\frac{c^2}{a+c},$$

а потому

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)\cdot\left(c-\frac{b}{2}\right),$$

т. е. число $\frac{b}{2}$ есть среднее геометрическое чисел $a-\frac{b}{2}$ и $c-\frac{b}{2}$, что и требовалось доказать.

40. Обозначим $\sqrt[3]{x}$ через z. Тогда данное уравнение перепишется в виде

$$2z^3-4z^2-z-15=0,$$

или

$$2z^3-6z^2+2z^2-6z+5z-15=0,$$

$$2z^2(z-3)+2z(z-3)+5(z-3)=0,$$

$$(z-3)(2z^2+2z+5)=0. \qquad (1)$$

Так как уравнение $2z^2+2z+5=0$ не имеет действительных корней, то уравнение (1) имеет единственный действительный корень $z=3$, т. е. $\sqrt[3]{x}=3$ и $x=27$.

41. Преобразуем левую часть данного уравнения

$$x^4-22x^2-5x+2=x^4+5x^3+2x^2-5x^3-25x^2-10x+x^2+$$
$$+5x+2=x^2(x^2+5x+2)-5x(x^2+5x+2)+$$
$$+(x^2+5x+2)=(x^2-5x+1)(x^2+5x+2).$$

Таким образом, данное уравнение перепишется в виде

$$(x^2-5x+1)\cdot(x^2+5x+2)=0.$$

Это уравнение распадается на два

$$x^2-5x+1=0 \text{ и } x^2+5x+2=0.$$

Из первого уравнения получаем $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, а из второго $x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

42. Имеем $25n^4-2n^3-n^2+2n=24n^4+n^4-n^2-2n^3+2n=$
$=24n^4+n^2(n^2-1)-2n(n^2-1)=24n^4+(n^2-1)(n^2-2n)=$
$=24n^4+(n-2)(n-1)\cdot n(n+1)$.

Поскольку $24n^4$ делится на 24 и $(n-2)(n-1)n(n+1)$ также делится на 24, как произведение четырех последовательных чисел, то и данное выражение делится на 24.

43. Имеем $n(n^4-1)=n(n^2+1)(n+1)(n-1)$. Если n делится на 2, то n^5-n делится на 2, а если n не делится на 2, то $n+1$ (а также $n-1$) делится на 2. Значит, при любом целом n выражение n^5-n делится на 2. Остается доказать, что n^5-n делится на 5. Если n кратно 5, то n^5-n также кратно 5; если же n не делится на 5, то $n=5k\pm1$ или $n=5k\pm2$. Пусть $n=5k\pm1$; тогда или $n+1$, или $n-1$ делится на 5, а потому n^5-n кратно 5.

Пусть теперь $n=5k\pm2$, тогда

$$n^2+1=25k^2\pm20k+5=5m.$$

Следовательно, и в этом случае n^5-n делится на 5. Итак, n^5-n делится на 2 и на 5, а потому оно делится на 10.

44. Обозначим катеты треугольника через a и b, а гипотенузу через c (рис. 7). Имеем

$$S_{\triangle ABC}=\frac{ab}{2}, \tag{1}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{a+b+c}{2}\cdot r, \tag{2}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{aR}{2}+\frac{bR}{2}-\frac{cR}{2}. \tag{3}$$

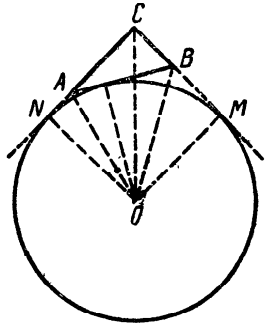

Рис. 7

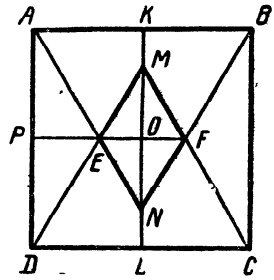

Рис. 8

Из (1) и (2) следует

$$r=\frac{ab}{a+b+c}. \tag{4}$$

Из (1) и (3) находим

$$R=\frac{ab}{a+b-c}. \tag{5}$$

Перемножив почленно (4) и (5), получим

$$Rr=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-c^2}=\frac{a^2b^2}{2ab}=\frac{ab}{2}=S_{\triangle ABC}.$$

Отв. Rr.

45. Первое решение. Очевидно, что искомый четырехугольник — ромб с углами, равными 60° и 120° (рис. 8).

Высота треугольника DMC $ML=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; отрезок $MK=a-\frac{a\sqrt{3}}{2}$; большая диагональ ромба $MN=LK-2MK=a(\sqrt{3}-1)$.

Треугольник EMF равносторонний. Так как высота этого равностороннего треугольника $h=\frac{1}{2}MN=\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$, то его сторона равна

$$EF=h:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1).$$

Следовательно, площадь ромба равна

$$2S_{\triangle EMF}=EF\cdot h=\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)=$$

$$=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)^2=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}(4-2\sqrt{3})=$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}.$$

Второе решение. Пусть EP — высота треугольника AED. Из треугольника AEP имеем

$$EP=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}30^\circ.$$

$$S_{EMFN}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle BFC}+S_{\triangle ANB}+S_{\triangle DMC}-S_{ABCD}=$$

$$=\frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{tg}30^\circ+\frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{tg}30^\circ+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-a^2=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}-a^2=\frac{(a^2+3a^2)\sqrt{3}-6a^2}{6}=$$

$$=\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}.$$

Отв. $\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}$.

46. Составим таблицу.

	Скульптор Белов	Скрипач Чернов	Художник Рыжов
Альтернатива для цвета волос	*ч*	*р*	*б*
То же	*р*	*б*	*ч*

Каждый из друзей может иметь волосы лишь того цвета, на который не указывает его фамилия. Однако черноволосым не может быть скульптор Белов, потому что Белов отвечает черноволосому. Следовательно, черноволосый — художник Рыжов (скульптор Белов имеет рыжие, а скрипач Чернов белые волосы). Читатель легко убедится, что при данных условиях нельзя составить другую таблицу.

47. Доказываемое равенство можно переписать в таком виде

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=1. \qquad (1)$$

Имеем $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{a}{b}$. Аналогично получаем $\dfrac{1+y}{1-y}=\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{1+z}{1-z}=\dfrac{c}{a}$. Таким образом, левая часть (1) перепишется так: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}=1$, что и требовалось доказать.

48. Очевидно, что $x=0$ не является решением данного уравнения. Поэтому, поделив обе его части на x^2, получим уравнение, равносильное исходному

$$x^2-x-10+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0. \qquad (1)$$

Введем обозначение $z=x-\dfrac{2}{x}$, откуда $x^2+\dfrac{4}{x^2}=z^2+4$. Теперь уравнение (1) перепишется в виде

$$z^2-z-6=0.$$

Решая это уравнение, получим $z_1=3$, $z_2=-2$. Таким образом, имеем два уравнения

$$x-\frac{2}{x}=3 \text{ и } x-\frac{2}{x}=-2,$$

или

$$x^2-3x-2=0 \text{ и } x^2+2x-2=0.$$

Из первого уравнения находим $x_{1;2}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, а из второго $x_{3;4}=-1\pm\sqrt{3}$.

49. Первое решение. Допустим, что число N делится на 121 при некотором значении n. Тогда $n^2+3n+5=121k$, где k — натуральное число, или

$$n^2+3n-(121k-5)=0 \qquad (1)$$

Для того чтобы n было натуральным числом, необходимо, чтобы дискриминант уравнения (1) был точным квадратом, т. е.

$$D = 9 + 4(121k - 5) = 11(44k - 1) = a^2,$$

где a — натуральное число. Для этого необходимо, чтобы $(44k-1)$ делилось на 11, что невозможно. Следовательно, число N не делится на 121 ни при каком натуральном n.

Второе решение. Имеем $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$. Для того чтобы это выражение делилось на 11, необходимо, чтобы $(n+7)(n-4)$ делилось на 11. Но так как $(n+7)-(n-4)=11$, то оба сомножителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Поэтому если $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится на 121 и, следовательно, $(n+7)(n-4)+33$ не может делиться на 121.

50. Пусть ABC — треугольник (рис. 9), образованный стороной AB и диагоналями AC и BC вписанного пятиугольника. Ясно, что $AC=CD\cdot\cos 18°=d\cdot\cos 18°$.

Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2}AC^2\cdot\sin 36° = \frac{1}{2}d^2\cos^2 18°\cdot\sin 36°.$$

Но так как $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ и $\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$,

то искомая площадь равна

$$\frac{d^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{10^2-(2\sqrt{5})^2}}{16} = \frac{d^2}{32}\cdot\sqrt{10(5+\sqrt{5})}.$$

51. 1. Предположим, что слуга — молодец.

а) Если второй туземец — молодец, то он скажет о себе, что он — молодец, и слуга передает это правдиво путешественнику.

б) Если второй туземец лгун, то он скажет о себе, что он — молодец, что слуга опять-таки правдиво передаст путешественнику.

2. Предположим теперь, что слуга — лгун.

а) Если второй туземец — молодец, то слуга передаст его высказывание перевранным, т. е. скажет, что он лгун.

б) Если второй туземец — лгун, то он скажет, что он молодец, и слуга также переврет его высказывание, сказав, что он — лгун.

Таким образом, слуга должен быть из племени молодцов, так как оба случая $2^а$ и $2^б$ противоречат условию задачи.

52. Решение осуществимо при помощи таблицы, составленной в результате рассуждений об отношениях между фамилией, профессией и одолженной книгой. Начнем с третьего условия задачи: «сын кузнеца взял книгу Кузнецова; он же — тезка профессии сына Кузнецова и одновременно тезка того, чью книгу взял сын Кузнецова». Отсюда и из того, что сын кузнеца не может иметь двух фамилий, следует, что он имеет, во-первых, фамилию по названию профессии сына Кузнецова; во-вторых, фамилию своего отца, у которого одолжил книгу сын Кузнецова (эти два вывода обозначим через B). Из последнего условия задачи следует, что плотник не является Столяровым. Из второго условия задачи следует, что плотник не является Плотниковым, а так как согласно предпоследнему условию задачи плотник взял книгу Шорникова, а значит, книгу друга своего отца, чью фамилию он не может сам иметь, то получаем, что плотник не является Шорниковым. Следовательно, плотник может иметь либо

фамилию Кузнецов, либо Трубочистов. Выясним, какое из этих двух предположений истинно. Допустим, что плотник не является Кузнецовым. Тогда, согласно третьему условию задачи, сын кузнеца взял книгу Кузнецова, т. е. книгу плотника, а значит, фамилия сына кузнеца Плотников, и у его отца — Плотникова (см. вывод *B*) — одолжил книгу сын Кузнецова, т. е. плотник. Однако, согласно предпоследнему условию задачи, плотник должен взять книгу Шорникова. Таким образом, мы пришли к противоречию, так как каждый из сыновей одолжил книгу лишь у одного из друзей своего отца. Значит, плотник может иметь только фамилию Трубочистов, что и запишем в таблицу.

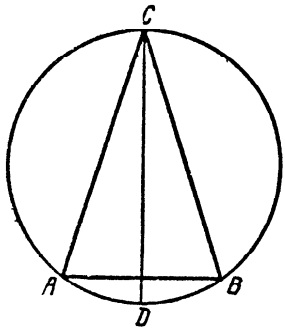

Рис. 9

Во второй части решения станем искать фамилию сына кузнеца. 1) Сын кузнеца не является Кузнецовым (согласно условию задачи). 2) Допустим, что сын кузнеца является Плотниковым. Тогда согласно третьему условию задачи, сын Кузнецова является плотником и сын Кузнецова одолжил книгу у Плотникова, т. е. отца сына кузнеца. Но плотник, т. е. сын Кузнецова, должен взять книгу, одолженную у Шорникова. Следовательно, мы пришли к противоречию. 3) Допустим тогда, что сын кузнеца является Столяровым; тогда сын Кузнецова является столяром, и сын Кузнецова одолжил книгу у сына кузнеца, т. е. у Столярова. Это возможно. 4) Допустим, что сын Кузнецова является Шорниковым; тогда сын Кузнецова является шорником и взял книгу отца кузнеца, т. е. Шорникова. Однако, согласно условию задачи, книгу Шорникова взял плотник, и, следовательно, мы опять пришли к противоречию. 5) Предположение, что сын кузнеца является трубочистом, противоречит результату первой части решения, согласно которому Трубочистов является плотником, а не кузнецом. Таким образом, мы получили, что фамилия сына кузнеца (как и самого кузнеца) Столяров, а Кузнецов является столяром. Это мы запишем в таблицу. Теперь для Плотникова и Шорникова остались профессии шорника и трубочиста. Однако Шорников не может быть шорником (согласно условию задачи), следовательно, он трубочист. Итак, фамилия трубочиста Шорников, это и ответ на поставленный вопрос.

Фамилии	Кузнецов	Плотников	Столяров	Шорников	Трубочистов
Профессии	столяр	шорник	кузнец	трубочист	плотник
Одолживший книгу	кузнец		столяр	плотник	

53. Перепишем условие задачи в таком виде:

$$\frac{1}{b}=\frac{a+c}{2ac}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}.$$

Следовательно, $\frac{1}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$. Так как, если члены арифметической прогрессии умножить на одно и то же число, то полученные числа также составляют арифметическую прогрессию, а потому $\frac{a+b+c}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{a+b+c}{a}$ и $\frac{a+b+c}{c}$.

Если к членам арифметической прогрессии прибавить или отнять одно и то же число, то получается опять арифметическая прогрессия; поэтому число $\frac{a+b+c}{b}-1$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{a+b+c}{a}-1$ и $\frac{a+b+c}{c}-1$, т. е. число $\frac{a+c}{b}$ является средним арифметическим чисел $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{a+b}{c}$, что и требовалось доказать.

54. Если b есть среднее арифметическое чисел, a и c, т. е. $b=\frac{a+c}{2}$, то $b^2-ac=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-ac=\left(\frac{a-c}{2}\right)^2>0$ Следовательно, $b^2>ac$.

Если же b есть среднее гармоническое чисел a и c, т. е.

$$b=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}=\frac{2ac}{a+c},\text{ то } b^2-ac=\frac{4a^2c^2}{(a+c)^2}-ac=$$

$$=-\frac{ac(a-c)^2}{(a+c)^2}<0.$$

Поэтому $b^2<ac$.

55. Очевидно, что $x\neq 0$, а потому, поделив обе части уравнения на x^2, получим уравнение, равносильное данному

$$x^2+\frac{1}{4x^2}=\frac{\sqrt{2}}{x}\cdot\sqrt{x^4-\frac{1}{4}},$$

или

$$x^2+\frac{1}{4x^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2-\frac{1}{4x^2}}.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$x^4+\frac{1}{16x^4}+\frac{1}{2}=2\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right).$$

Пусть $x^2-\frac{1}{4x^2}=z$, тогда $x^4+\frac{1}{16x^4}-\frac{1}{2}=z^2$, откуда

$$x^4+\frac{1}{16x^4}+\frac{1}{2}=z^2+1.$$

Итак, имеем

$$z^2+1=2z,\ z^2-2z+1=0,\ z=1.$$

Далее

$$x^2-\frac{1}{4x^2}=1,$$

или

$$4x^4-4x^2-1=0.$$

Из условия следует, что $x>0$. Последнее уравнение имеет единственный положительный корень $x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Проверкой можно убедиться, что $x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ удовлетворяет исходному уравнению.

56. Пусть $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}=u$; $\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=v$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^5-v^5=(x-2)(x-32)-(x-1)(x-33)=31. \end{cases}$$

Поделив почленно второе уравнение системы на первое, получим

$$u^4+u^3v+u^2v^2+uv^3+v^4=31. \qquad (1)$$

Далее имеем

$$(u-v)^4=1,$$

или

$$u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4=1. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из равенства (1) равенство (2), получим

$$5u^3v-5u^2v^2+5uv^3=30,$$

или

$$uv(u^2+v^2)-u^2v^2-6=0.$$

Но так как $u^2+v^2=2uv+1$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$uv(2uv+1)-u^2v^2-6=0,$$

или

$$(uv)^2+(uv)-6=0,$$

откуда

$$(uv)_1=2;\ (uv)_2=-3.$$

Итак, имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} uv = 2, \\ u - v = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} uv = -3, \\ u - v = 1. \end{cases}$$

Вторая система не имеет действительных решений, а из первой находим $u_1 = 2$, $v_1 = 1$; $u_2 = -1$; $v_2 = -2$. Теперь легко найти корни данного уравнения

$$x_{1;2} = 17 \pm \sqrt{257};$$

$$x_{3;4} = 17 \pm \sqrt{224}.$$

57. Пусть a — цифра десятков трехзначного числа N, а b — цифра его единиц, тогда, согласно условию задачи $(7-a-b)$ — цифра сотен. Таким образом,

$$N = 100(7 - a - b) + 10a + b = 700 - 90a - 99b =$$

$$= 700 - 91a - 98b + a - b = 7(100 - 13a - 14b) + (a - b).$$

Теперь видно, что для того, чтобы число N делилось на 7, необходимо, чтобы $(a-b)$ делилось на 7. Но в силу условия задачи $a<7$ и $b<7$, поэтому $(a-b)$ делится на 7 лишь при $a=b$. Итак, мы доказали необходимость условия.

Пусть $a=b$; тогда $N=100(7-2a)+10a+a=7(100-27a)$, т. е. N делится на 7, если $a=b$. Следовательно, доказана и достаточность условия.

58. Легко проверить, что числа 550 и 803 обладают свойством, указанным в условии задачи. Остается доказать, что, кроме этих двух чисел, нет трехзначных чисел, обладающих этим свойством. Ясно, что частное от деления трехзначного числа на 11 есть двухзначное число. Обозначим его через $10x+y$. Итак, трехзначное число, которое подлежит рассмотрению, есть $(10x+y)11=100x+10(x+y)+y$.

Пусть $x+y=10$. Тогда $(10x+y)\cdot 11=100(x+1)+y$. Следовательно, согласно условию задачи, должно быть $(x+1)^2+y^2=10x+y$. Учитывая, что $y=10-x$, получаем $2x^2-27x+91=0$. Отсюда находим $x=7$, а потому $y=10-7=3$. Таким образом, если $x+y=10$, то имеется единственное число, удовлетворяющее условию задачи, а именно $(10\cdot 7+3)\cdot 11=803$.

Пусть теперь $x+y>10$. В этом случае в силу условия задачи должно быть $(x+1)^2+(x+y-10)^2+y^2=10x+y$, т. е.

$$2x^2 + 2x(y - 14) + 2y^2 - 21y + 101 = 0. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что y нечетное число, и также видно, что $y\neq 1$, так как при $y=1$ сумма $x+y\leqslant 10$, что противоречит неравенству $x+y>10$. Следовательно, y может принимать лишь значения 3, 5, 7, 9. Если рассматривать (1), как уравнение относительно x, то его дискриминант есть

$$(y - 14)^2 - 2(2y^2 - 21y + 101),$$

который отрицателен при $y=5, 7, 9$. Если же $y=3$, то из (1) следует, что $x_1=4$, $x_2=7$, что противоречит условию $x+y>10$. Следовательно, при $x+y>10$ нет ни одного трехзначного числа, которое удовлетворяло бы условию задачи.

Наконец, остается рассмотреть случай, когда $x+y<10$. В этом случае, согласно условию задачи, должно быть $x^2+(x+y)^2+y^2=10x+y$, или $2x^2+2xy+2y^2=10x+y$. (2)
Отсюда видно, что y — четное число. Если рассматривать (2), как квадратное уравнение относительно x, то его дискриминант равен

$$(y-5)^2-2y(2y-1)=25-8y-3y^2,$$

который при $y=2, 4, 6, 8$ отрицателен и лишь при $y=0$ он положителен. Подставляя $y=0$ в равенство (2), получим $2x^2=10x$. Но так как $x\neq 0$, то $x=5$. Итак, если $x+y<0$, то имеется единственное число $(10\cdot 5+0)\cdot 11=550$, для которого выполняется условие задачи. Из изложенного следует, что утверждение задачи верно.

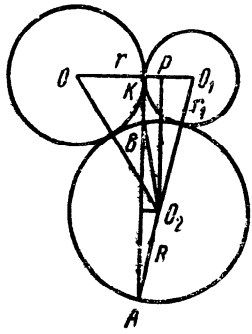

Рис. 10

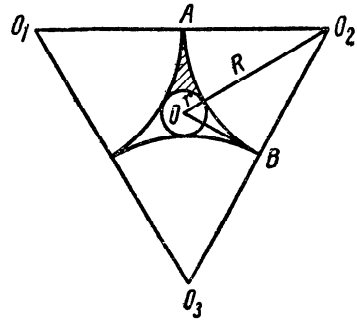

Рис. 11

59. Пусть K — точка касания двух окружностей, имеющих радиусы r и r_1, и P — основание перпендикуляра, опущенного из центра O_2 третьей окружности на OO_1 (рис. 10). Положив $KP=x$, будем иметь

$$AB=2\sqrt{R^2-x^2}. \qquad (1)$$

Величина x определяется из уравнения

$$(R+r)^2-(r+x)^2=(R+r_1)^2-(r_1-x)^2$$

и равна $x=\dfrac{r-r_1}{r+r_1}R$. Подставив это значение в (1), получим:

$$AB=\frac{4\sqrt{rr_1}}{r+r_1}R.$$

60. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры равных окружностей и O — центр круга радиуса r (рис. 11). Обозначим через $S_{O_1O_2O_3}$ площадь $\Delta O_1O_2O_3$, S_{AO_2B} — площадь сектора AO_2B; тогда искомая площадь будет

$$S=\frac{1}{3}\left(S_{O_1O_2O_3}-3S_{AO_2B}-\pi r^2\right). \qquad (1)$$

Если R — общий радиус трех кругов, то

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}(R + r),$$

откуда

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} r = \left(3 + 2\sqrt{3}\right) r.$$

Далее, находим

$$S_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2} 2R \cdot R\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot R^2 = 3\left(12 + 7\sqrt{3}\right) r^2,$$

$$S_{AO_2B} = \frac{1}{6} \pi R^2 = \frac{\pi}{2}\left(7 + 4\sqrt{3}\right) r^2,$$

и по формуле (1) окончательно получаем

$$S = \left[12 + 7\sqrt{3} - \left(\frac{23}{6} + 2\sqrt{3}\right)\pi\right] r^2.$$

61. Обозначим скорость буксира через v *км/ч*, а скорость течения реки — u *км/ч*, расстояние от пункта A до устья реки — x *км*, а расстояние от устья реки до пункта B по озеру — y *км*. От пункта A до устья реки плоты шли $\frac{x}{u}$ *ч*, а от устья реки до пункта B пароход доставил их за $\frac{y}{\frac{v}{2}}$ *ч*. Всего же путь из A в B продолжался $11\frac{1}{2}$ суток, т. е. 276 *ч*, поэтому

$$\frac{x}{u} + \frac{2y}{v} = 276. \tag{1}$$

На путь от пункта A до устья реки пароход тратит $\frac{x}{u+v}$ *ч*, а от устья реки до пункта B тратит $\frac{y}{v}$ *ч*, поэтому

$$\frac{x}{u+v} + \frac{y}{v} = 40. \tag{2}$$

Рассуждая далее аналогично, составим уравнение

$$\frac{y}{v} + \frac{x}{v-u} = 48. \tag{3}$$

Из уравнений (2) и (3) получаем

$$\left(\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v+u}\right) \cdot x = 8,$$

откуда

$$x = \frac{4(v^2 - u^2)}{u}. \qquad (4)$$

Складывая почленно (2) и (3), получим

$$\frac{2y}{v} + \frac{2x}{v^2 - u^2} = 88,$$

или, учитывая равенство (4),

$$\frac{2y}{v} = 88 - \frac{2v}{v^2 - u^2} \cdot x = 88 - \frac{8v}{u}. \qquad (5)$$

Подставляя в уравнение (1) вместо x и $\frac{2y}{v}$ их выражения из равенств (4) и (5), получим

$$4 \cdot \frac{v^2 - u^2}{u^2} + 88 - \frac{8v}{u} = 276,$$

или

$$\frac{v^2}{u^2} - 2\frac{v}{u} - 48 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $\left(\text{относительно } \frac{v}{u}\right)$ $\frac{v}{u} = 8$.

Следовательно, $\frac{2y}{v} = 88 - 8 \cdot 8 = 24$.

Отв. 24 *ч.*

62. Из условия задачи следует, что $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, или $\frac{b-a}{ab} = \frac{c-b}{bc}$, или $c(a-b) = a(b-c)$. Поделив обе части последнего равенства на произведение $-a(a-c)(a-b)$, получим $\frac{-c}{a(a-c)} = \frac{c-b}{(a-c)(a-b)}$, или $\frac{(a-c)-a}{a(a-c)} = \frac{(a-b)-(a-c)}{(a-b)(a-c)}$. Отсюда $\frac{1}{a} - \frac{1}{a-c} = \frac{1}{a-c} - \frac{1}{a-b}$, т. е. $\frac{1}{a-c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a-b}\right)$. Таким образом, число $\frac{1}{a-c}$ является средним арифметическим чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a-b}$.

Теперь докажем вторую часть задачи. Из условия имеем $a(b-c) = c(a-b)$. Поделив обе части этого равенства на произведение $-c(c-a)(b-c)$, получим $\frac{-a}{c(c-a)} = \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$, или

$\frac{(c-a)-c}{c(c-a)} \leqq \frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)}$, т. е. $\frac{1}{c}-\frac{1}{c-a} \leqq \frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}$, откуда $\frac{1}{c-a} \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c-b}\right)$. Таким образом, число $\frac{1}{c-a}$ является средним арифметическим чисел $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{c-b}$.

63. Сразу видно, что если $a=0$, то и $x=0$. Пусть теперь $a \neq 0$. Положим $x+a=u$, $x-a=v$. Тогда данное уравнение перепишется в виде

$$\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{v^2}+\sqrt[3]{uv}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Умножив обе части этого уравнения на выражение $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$, которое отлично от нуля, получим

$$u-v=\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right).$$

Так как $u-v=2a$, то имеем

$$\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=2\sqrt[3]{a}.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=2\sqrt[3]{a}, \\ u-v=2a. \end{cases}$$

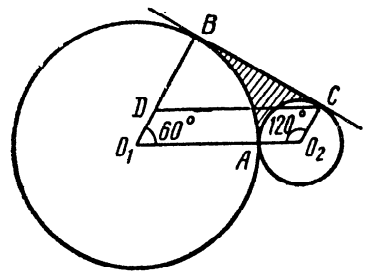

Рис. 12

Из первого уравнения системы имеем

$$u-v-3\sqrt[3]{uv}\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)=8a,$$

или

$$2a-3\sqrt[3]{uv}\cdot 2\sqrt[3]{a}=8a,$$

откуда (учитывая $u-v=2a$) $u=a$, $v=-a$.

Таким образом, $x+a=a$, откуда $x=0$. Следовательно, уравнение имеет единственный корень $x=0$ при любом значении a.

64. Имеем $a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1=(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1=(a^2+3a+1)^2$, что и требовалось доказать.

65. Пусть точки B и C — точки касания окружностей с общей внешней касательной, а O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 12). Проведем $CD \parallel O_1O_2$. В прямоугольном треугольнике BCD катет $BD=BO_1-O_1D=BO_1-CO_2=3-1=2$, а гипотенуза $CD=O_1O_2=3+1=4$. Но если катет в два раза меньше гипотенузы, то противолежащий ему $\angle BCD=30°$, а $\angle BDC=\angle BO_1A=60°$ и $\angle CO_2O_1=120°$. Искомая площадь S равна разности между площадью трапеции O_1O_2CB и суммой площадей секторов AO_1B и AO_2C. Основания трапеции суть 3 и 1, а высота $BC=\sqrt{CD^2-BD^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$. Поэтому

$$S=\frac{3+1}{2}2\sqrt{3}-\left(\frac{\pi\cdot3^2\cdot60}{360}+\frac{\pi\cdot1^2\cdot120}{360}\right)=4\sqrt{3}-$$

$$-\frac{11}{6}\pi=\frac{24\sqrt{3}-11\pi}{6}.$$

Отв. $\frac{24\sqrt{3}-11\pi}{6}$.

66. Пусть C — пункт первой встречи велосипедиста и пешехода, а D — пункт второй встречи (пункт C расположен между A и D). Введем обозначения: $AC=3a$, $CD=2a$, так как AC — путь, проходимый пешеходом за 1 *ч*, а CD — путь, проходимый им за 2/3 *ч* (40 *мин*). Пусть $BD=x$. Таким образом, $7a+2x$ — путь, покрываемый велосипедистом за 1 *ч* (60 *мин*); $2a+2x$ — путь, покрываемый велосипедистом за 40 *мин*. В силу условий задачи и введенных нами обозначений имеем $\frac{7a+2x}{2a+2x}=\frac{3}{2}$, откуда $x=4a$. Поэтому $AB=9a$; скорость пешехода равна $3a$ *ед/ч*. Следовательно, пешеход пройдет расстояние AB за $\frac{9a}{3a}=3$ *ч*.

Отв. 3 *ч*.

67. Обозначим расстояние от A до B через s *км*, скорость течения через v *км/ч*, скорость парохода в стоячей воде через u *км/ч*.

Так как, по условию, катер каждый час отстает от парохода на 8 *км*, а потому скорость катера $(u-8)$ *км/ч*. Когда пароход и катер плывут по течению, то скорость парохода равна $(v+u)$ *км/ч*, а скорость катера $(u-8+v)$ *км/ч*. Поскольку от пункта A до пункта B пароход проходит в полтора раза быстрее, чем катер, то

$$\frac{1{,}5s}{v+u}=\frac{s}{u+v-8}. \qquad (1)$$

Когда же пароход и катер движутся против течения, то скорость парохода $(u-v)$ *км/ч*, а скорость катера $(u-v-8)$ *км/ч*. Так как, по условию, пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера, то

$$\frac{2s}{u-v}=\frac{s}{u-v-8}. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим $v=4$, $u=20$. Следовательно, скорость катера равна $20-8=12$.

Отв. Скорость парохода 20 *км/ч*, а катера — 12 *км/ч*.

68. Согласно условию задачи имеем

$$b+c=2a \text{ и } b^2=ac.$$

Разделив почленно первое равенство на второе, получим $\frac{1}{b}+\frac{c}{b^2}=$

$= \frac{2}{c}$. Но так как $b^2 = ac$, то $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2}{c}$, откуда $c = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

69. Из условия следует, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, следовательно, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{2}{b} = 0$, или $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{2}{b}\right) = 0$, или

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{c} - \frac{2(a+b+c)}{b} = 0.$$

Значит, число $\frac{a+b+c}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{a+b+c}{a}$ и $\frac{a+b+c}{c}$, а потому число $\frac{a+b+c}{b} - 2$ является средним арифметическим чисел $\frac{a+b+c}{a} - 2$ и $\frac{a+b+c}{c} - 2$, т. е. число $\frac{a+c-b}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{b+c-a}{a}$ и $\frac{a+b-c}{c}$, что и требовалось доказать.

70. Легко заметить, что данное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2} = 1,$$

или

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right| + \left|\sqrt{x-1}-2\right| = 1.$$

Если $\sqrt{x-1} < 1$, то данное уравнение перепишется в виде

$$1 - \sqrt{x-1} + 2 - \sqrt{x-1} = 1, \text{ т. е. } \sqrt{x-1} = 1,$$

что противоречит условию ($\sqrt{x-1} < 1$). Следовательно, если $\sqrt{x-1} < 1$, то уравнение не имеет решения.

Если $1 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 2$, т. е. если $2 \leqslant x \leqslant 5$, то данное уравнение можно переписать в таком виде

$$\sqrt{x-1} - 1 + 2 - \sqrt{x-1} = 1, \text{ т. е. } 1 = 1.$$

Таким образом, при $2 \leqslant x \leqslant 5$ данное уравнение выполняется тождественно.

Если $\sqrt{x-1} > 2$, то данное уравнение перепишется в виде

$$\sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} - 2 = 1, \text{ или } \sqrt{x-1} = 2,$$

что противоречит условию ($\sqrt{x-1} > 2$). Следовательно, при $\sqrt{x-1} > 2$ уравнение не имеет решения. Итак, данное уравнение вы-

полняется при любом значении x из промежутка $2 \leqslant x \leqslant 5$, а при всех x, не принадлежащих этому промежутку, уравнение не имеет решений.

71. Пусть $\sqrt[4]{77+x}=u; \sqrt[4]{20-x}=v.$ (1)

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4=77+x, \\ v^4=20-x, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97. \end{cases}$$

Далее, $u^2+v^2+2uv=25$, откуда $u^2+v^2=25-2uv$. Перепишем уравнение $u^4+v^4=97$ так

$$(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=97.$$

Так как $u^2+v^2=25-2uv$, то имеем

$$(25-2uv)^2-2u^2v^2=97,$$

или

$$(uv)^2-50uv+264=0$$

Решив это уравнение, приходим к двум системам

$$\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=5, \\ uv=44. \end{cases}$$

Вторая система не имеет действительных решений, а из первой системы находим

$$u_1=2,\ v_1=3 \quad \text{или} \quad u_2=3,\ v_2=2. \tag{2}$$

Наконец, учитывая (1) и (2), получаем

$$x_1=4;\ x_2=-61.$$

72. Имеем $n^5-5n^4+25n^3+5n^2-26n=n(n^4-5n^3+25n^2+5n-26)=$ $=n(n^4-5n^3+26n^2-n^2+5n-26)=n[n^2(n^2-1)-5n(n^2-1)+26(n^2-1)]=$ $=(n-1)n(n+1)(n^2-5n+26)$.

Поскольку $120=3\cdot 8\cdot 5$, то достаточно доказать, что данное выражение делится на 3, 8 и 5.

Произведение $(n-1)n(n+1)$ делится на 3, как произведение трех последовательных целых чисел. Следовательно, и рассматриваемое выражение кратно трем.

Если n нечетно, то каждое из чисел $n-1$, $n+1$ и $n^2-5n+26$ делится на 2, а потому их произведение делится на 8; если же n четно и делится на 4, то произведение $n(n^2-5n+26)$ делится на 8, а если n четно и не делится на 4, т. е. $n=4k+2$, то произведение $n(n^2-5n+$ $+26)=(4k+2)(16k^2-4k+20)=8(2k+1)(4k^2-k+5)$ также делится на 8. Таким образом, при любом целом неотрицательном n данное выражение кратно 8.

Наконец, докажем, что данное выражение делится на 5. Если n делится на 5, то рассматриваемое число кратно 5, если $n=5k-1$, то $n+1$ делится на 5, а если $n=5k+1$, то $n-1$ кратно 5, если же $n=$

$=5k\pm2$, то $n^2-5n+26=25k^2\pm20k-25k\mp10+30$ делится на 5. Итак, данное выражение делится на 3, 8 и 5, а потому оно делится на 120.

73. Поскольку $60=3\cdot4\cdot5$, то надо доказать, что $a\cdot b\cdot c$ делится на 3, 4 и 5.

Предположим, что ни a, ни b не делятся на 3, тогда каждое из этих чисел имеет вид $3n\pm1$, а их квадраты имеют вид $9n^2\pm6n+1$. Следовательно, при делении a^2+b^2 на 3 получается остаток 2. Но при делении c^2 на 3 получается остаток, равный или 0 или 1. Таким образом, если ни a, ни b не делятся на 3, то $a^2+b^2\neq c^2$. Следовательно, хотя бы одно из чисел a и b делится на 3. Итак, abc делится на 3.

Докажем, что abc кратно четырем. Предположим, что a и b одновременно нечетные числа, т. е. $a=2m+1$, $b=2n+1$. В этом случае $c^2=4m^2+4m+4n^2+4n+2$, т. е. число c четно, а c^2 не кратно четырем, что не может быть, так как четное число в квадрате всегда кратно четырем. Следовательно, или a, или b четно, а c нечетно. Пусть $c=2n+1$, $a=2m$, $b=2k+1$. Но так как $a^2+b^2=c^2$, то $4m^2+4k^2+4k+1=4n^2+4n+1$, откуда $m^2=n(n+1)-k(k+1)$. Числа $n(n+1)$ и $k(k+1)$ — четные, как произведения двух последовательных целых чисел. Значит, m^2 — четно, а потому и m четно. Таким образом, $a=2m$ кратно четырем. Итак, abc делится на 4.

Остается доказать, что abc кратно пяти. Предположим, что ни a, ни b не делятся на 5, т. е. имеют вид $5k\pm1$ или $5k\pm2$. Ясно, что квадраты таких чисел при делении на 5 дают в остатке или 1, или 4.

Если $a=5m\pm1$, $b=5n\pm1$, то c^2, равное a^2+b^2, при делении на 5 дает остаток, равный 2, что, очевидно, быть не может. Если же $a=5k\pm1$, $b=5n\pm2$, то число c кратно 5. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a, b, c кратно пяти, а потому abc делится на 5. Итак, abc делится на 3, 4 и 5, а потому число abc делится на 60.

74. Обозначим через x искомую сторону треугольника, а через h_a, h_b, h_x — высоты, соответствующие сторонам a, b, x. В силу условия задачи имеем

$$h_a+h_b=h_x. \tag{1}$$

Кроме того, удвоенная площадь треугольника равна каждому из произведений $a\cdot h_a$, $b\cdot h_b$, $x\cdot h_x$. Следовательно,

$$a\cdot h_a=b\cdot h_b=x\cdot h_x.$$

Отсюда находим $h_a=\dfrac{x\cdot h_x}{a}$, $h_b=\dfrac{x\cdot h_x}{b}$ и, подставив эти значения h_a и h_b в равенство (1), получаем $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=1$. Отсюда $x=\dfrac{ab}{a+b}$, Для того чтобы из отрезков a, b и $\dfrac{ab}{a+b}$ можно было построить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы было (для определенности считаем $a>b$)

$$a-b<\frac{ab}{a+b}<a+b,$$

или

$$a^2-b^2<ab<(a+b)^2.$$

Так как $ab<(a+b)^2$ при любых a и b, то остается единственное условие: $a^2-b^2<ab$, или $a^2-ab-b^2<0$. Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{5b^2}{4}<0,$$

или

$$\left(a-\frac{b}{2}+\frac{b\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{b}{2}-\frac{b\sqrt{5}}{2}\right)<0,$$

но так как здесь первый сомножитель положителен, то имеем лишь $a-\frac{b}{2}-\frac{b\sqrt{5}}{2}<0$, или $a<\frac{b\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$. Итак, условие возможности задачи следующее:

$$b<a<\frac{b\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}.$$

75. Пусть катеты прямоугольного треугольника a и b, а гипотенуза c.

По условию

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4}=2\cdot\frac{ab}{2},$$

или

$$c^2=\frac{4ab}{\sqrt{3}}, \tag{1}$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$c^2=a^2+b^2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) имеем

$$a^2+b^2=\frac{4ab}{\sqrt{3}}. \tag{3}$$

Поделив обе части (3) на ab, получим

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Обозначив $\frac{a}{b}$ через x, получаем

$$x+\frac{1}{x}=\frac{4}{\sqrt{3}},$$

или

$$\sqrt{3}\cdot x^2-4x+\sqrt{3}=0,$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{3}\ ,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

т. е. отношение большего катета к меньшему равно $\sqrt{3}$.

76. Введем следующие обозначения:

a — расстояние от устья притока до пунктов A и B;

u_1 — скорость течения реки;

u_2 — скорость течения притока;

v — скорость лодки (относительно воды).

В силу условия задачи и введенных нами обозначений составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{v-u_2}+\dfrac{a}{v+u_2}=\dfrac{32}{35}\left(\dfrac{a}{v-u_1}+\dfrac{a}{v+u_1}\right), \\ \dfrac{a}{v+2-u_2}+\dfrac{a}{v+2+u_2}=\dfrac{15}{16}\left(\dfrac{a}{v+2-u_1}+\dfrac{a}{v+2+u_1}\right), \\ \dfrac{a}{v-2-u_2}+\dfrac{a}{v-2+u_2}=\dfrac{7}{8}\left(\dfrac{a}{v-2-u_1}+\dfrac{a}{v-2+u_1}\right). \end{cases}$$

Преобразуя эти уравнения, получаем такую систему

$$\begin{cases} \dfrac{2v}{v^2-u_2^2}=\dfrac{32}{35}\cdot\dfrac{2v}{v^2-u_1^2}, \\ \dfrac{2(v+2)}{(v+2)^2-u_2^2}=\dfrac{15}{16}\cdot\dfrac{2(v+2)}{(v+2)^2-u_1^2}, \\ \dfrac{2(v-2)}{(v-2)^2-u_2^2}=\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{2(v-2)}{(v-2)^2-u_1^2}. \end{cases}$$

Заметив, что из условия задачи следует, что $v\neq 0$ и $v\neq\pm 2$, преобразуем последнюю систему к такому виду

$$\begin{cases} 3v^2=35u_1^2-32u_2^2, \\ (v+2)^2=16u_1^2-15u_2^2, \\ (v-2)^2=8u_1^2-7u_2^2. \end{cases}$$

Умножив второе и третье уравнения на 3 и вычтя из них первое, получим следующую эквивалентную систему

$$\begin{cases} 3v^2=35u_1^2-32u_2^2, \\ 3(4v+4)=13\left(u_1^2-u_2^2\right), \\ 3(-4v+4)=-11\left(u_1^2-u_2^2\right). \end{cases}$$

Сложив последние два уравнения, получим

$$u_1^2 - u_2^2 = 12.$$

Подставив значение $u_1^2 - u_2^2 = 12$ в последнее уравнение системы, получим $v = 12$. Теперь из первого уравнения

$$3v^2 = 3u_1^2 + 32\left(u_1^2 - u_2^2\right)$$

найдем $u_1^2 = 16$, откуда $u_1 = 4$.

Отв. Скорость течения реки 4 *км/ч*.

77. Данные равенства можно переписать так:

$$\frac{c(ay - bx)}{c^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{a(bz - cy)}{a^2}.$$

На основании свойства равных отношений имеем

$$\frac{c(ay - bx)}{c^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{a(bz - cy)}{a^2} =$$

$$= \frac{c(ay - bx) + b(cx - az) + a(bz - cy)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0.$$

Следовательно, $ay - bx = 0$, $cx - az = 0$, $bz - cy = 0$, или

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Отсюда $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, что и требовалось доказать.

78. Пусть $\sqrt[3]{24 + x} = u$; $\sqrt{12 - x} = v$.

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ u^3 + v^2 = 36. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение системы $v = 6 - u$, получаем

$$u^3 + (6 - u)^2 = 36,$$

или

$$u^3 + u^2 - 12u = 0,$$

или

$$u(u^2 + u - 12) = 0,$$

$$u(u + 4)(u - 3) = 0,$$

откуда $u_1 = 0$; $u_2 = -4$; $u_3 = 3$.

Так как $u = \sqrt[3]{24 + x}$, то $x_1 = -24$; $x_2 = -88$; $x_3 = 3$.

79. Пусть $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$. Тогда $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b) \times (a - b) = 4(m + n + 1)(m - n)(a^2 + b^2)$. Если m и n — числа одинаковой четности (т. е. оба четные или оба нечетные), то $m - n$ делится на 2, а если m и n — числа неодинаковой четности (т. е. одно из них четное, а другое нечетное), то число $m + n + 1$ делится на 2. Кроме

того, число a^2+b^2, как сумма двух нечетных чисел, делится на 2. Следовательно, число N делится на 16.

Далее, если хотя бы одно из чисел a и b делится на 3, то число N делится на 3. Если же ни a, ни b не делятся на 3, то $a=3k\pm1$, $b=3p\pm1$. Ясно, что при любом выборе пары чисел a и b или $a+b$, или $a-b$ делятся на 3.

Наконец, если хотя бы одно из чисел a и b делится на 5, то и N делится на 5. Если же a и b не делятся на 5, то $a=5k\pm\alpha$, $b=5p\pm\beta$, где α и β могут принимать значения 1 и 2. Если $\alpha=\beta$, то

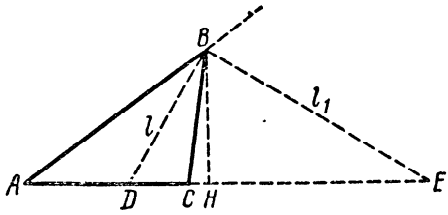

Рис. 13

$a-b=5(k-p)$, а потому число N будет делиться на 5. Если же $\alpha\neq\beta$, то $a^2+b^2=(5k\pm\alpha)^2+(5p\pm\beta)^2=25k^2\pm10k\alpha+25p^2\pm10p\beta+(\alpha^2+\beta^2)$. Но сумма $\alpha^2+\beta^2=5$, так как одно из слагаемых равно 4, а другое 1. Итак, число N делится на 5

Таким образом, мы доказали, что число N делится на три попарно взаимно простых числа (16, 3, 5), а потому оно делится на их произведение $16\cdot3\cdot5=240$, что и требовалось доказать.

80. Первое решение. Известно, что $BD=l$, $BE=l_1$ (рис. 13).

Если $DC=x$, то $AD=kx$; если $CE=y$, то $AE=ky$. Так как биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, то треугольник BDE прямоугольный. Из этого треугольника имеем

$$DE^2=BD^2+BE^2,$$

или

$$(x+y)^2=l^2+l_1^2. \tag{1}$$

Также имеем

$$AE=AD+DC+CE, \text{ или } ky=kx+x+y,$$

откуда

$$y=\frac{x(k+1)}{k-1}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$x+\frac{x(k+1)}{k-1}=\sqrt{l^2+l_1^2},$$

откуда

$$x=\frac{(k-1)\sqrt{l^2+l_1^2}}{2k}=DC.$$

Удвоенная площадь треугольника DBE равна $l \cdot l_1 = DE \cdot BH$, где BH — высота, или

$$l \cdot l_1 = (x + y) \cdot BH,$$

или

$$l \cdot l_1 = \sqrt{l^2 + l_1^2} \cdot BH,$$

откуда

$$BH = \frac{l \cdot l_1}{\sqrt{l^2 + l_1^2}}.$$

Площадь треугольника ABC

$$S = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{BH}{2}(AD + DC) = \frac{l \cdot l_1}{2\sqrt{l^2 + l_1^2}}(kx + x) =$$

$$= \frac{l \cdot l_1 (k+1)}{2\sqrt{l^2 + l_1^2}} \cdot \frac{(k-1)\sqrt{l^2 + l_1^2}}{2k} = \frac{l \cdot l_1 (k^2 - 1)}{4k}.$$

Второе решение. В $\triangle DBE$ $\angle B = 90°$, а поэтому

$$S_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} l \cdot l_1. \qquad (1)$$

В то же время

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBE}} = \frac{AC}{DE}, \text{ или } S_{\triangle ABC} = \frac{AC}{DE} \cdot S_{\triangle DBE}. \qquad (2)$$

Как видно из формулы (2), надо найти отношение $\frac{AC}{DE}$.

Из свойства биссектрисы угла в треугольнике ABC следует, что $\frac{AD}{DC} = k$; значит,

$$\frac{AD + DC}{DC} = k + 1, \quad \frac{DC}{AD + DC} = \frac{1}{k+1}.$$

Далее, $\frac{AD + DC + CE}{CE} = k$, поэтому

$$\frac{AD + DC}{CE} = k - 1, \quad \frac{CE}{AD + DC} = \frac{1}{k-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{DC + CE}{AD + DC} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1} = \frac{2k}{k^2 - 1},$$

т. е.

$$\frac{AC}{DE}=\frac{k^2-1}{2k}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AC}{DE}\cdot S_{\triangle DBE}=\frac{k^2-1}{2k}\cdot\frac{l\cdot l_1}{2}=\frac{(k^2-1)\cdot l\cdot l_1}{4k}.$$

81. Пусть искомое расстояние $AB=x$ *км*, а y *ч* — время, за которое первый турист проходит 1 *км*; тогда второй турист проходит 1 *км* за $\left(y+\frac{1}{12}\right)$ *ч*. Так как, по условию задачи, первый турист, пройдя пятую часть пути AB, вернулся в A и, пробыв там $\frac{1}{6}$ *ч*, снова пошел в B, то первый турист прошел расстояние, равное $\frac{7}{5}x$. Первый турист был всего в пути (вместе с остановкой в пункте A) $\frac{7yx}{5}+\frac{1}{6}$ *ч*. Следовательно, в силу условия задачи, имеем

$$\frac{7xy}{5}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2}. \tag{1}$$

Рассуждая аналогично для второго туриста, получим

$$\frac{x(12y+1)}{12}=\frac{5}{2}. \tag{2}$$

Исключая y из уравнений (1) и (2), найдем $x=10$.

Отв. 10 *км*.

82. Пусть C — пункт первой встречи катера и парохода. Введем обозначения: 1 *ед/ч* — скорость течения, y *ед/ч* — собственная скорость парохода, z *ед/ч* — собственная скорость катера. Пусть $CB=x$ (*ед*), тогда $AC=5x$ (*ед*). В силу условий задачи и введенных нами обозначений, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}(z+1)=5x,\\[2ex] \dfrac{6x}{y+1}+\dfrac{x}{y-1}=\dfrac{1}{3},\\[2ex] \left(\dfrac{6x}{y+1}+\dfrac{6x}{y-1}\right)\cdot 9=\left(\dfrac{6x}{z+1}+\dfrac{6x}{z-1}\right)\cdot 5.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x=\frac{z+1}{15}$. Подставим полученное выражение для x во второе уравнение системы. Имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2(z+1)}{5(y+1)} + \dfrac{z+1}{15(y-1)} = \dfrac{1}{3}, \\ \left(\dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{y-1}\right)\cdot 9 = \left(\dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{z-1}\right)\cdot 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы имеем

$$(z+1)\left[\frac{2}{5(y+1)} + \frac{1}{15(y-1)}\right] = \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$z+1 = \frac{5(y^2-1)}{7y-5},$$

а также

$$z-1 = \frac{5(y^2-1)}{7y-5} - 2 = \frac{5y^2-14y+5}{7y-5}.$$

Подставляя значения $z+1$ и $z-1$ во второе уравнение последней системы, получим

$$\left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1}\right)\cdot 9 = \left[\frac{7y-5}{5(y^2-1)} + \frac{7y-5}{5y^2-14y+5}\right]\cdot 5,$$

$$\frac{18y}{y^2-1} = (7y-5)\frac{10y^2-14y}{(y^2-1)(5y^2-14y+5)},$$

$$9(5y^2-14y+5) = (7y-5)\cdot(5y-7),$$

$$5y^2-26y+5 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 5,\ y_2 = \frac{1}{5}.$$

Но так как должно быть $y>1$, то имеем лишь $y=5$. Таким об разом,

$$y = 5;\ z+1 = 4;\ x = \frac{4}{15}.$$

Искомое время равно

$$9\cdot\left(\frac{6x}{y+1} + \frac{6x}{y-1}\right) = 9\cdot 6\cdot\frac{4}{15}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{9\cdot 6\cdot 4\cdot 5}{15\cdot 12} = 6.$$

Отв. 6 *ч.*

83. Перепишем данное условие в виде пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

откуда $\frac{a^4}{b^4}=\frac{c^4}{d^4}$. Составим две производные пропорции

$$\frac{a^4-b^4}{b^4}=\frac{c^4-d^4}{d^4} \tag{1}$$

и

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

или

$$\frac{(a-b)^4}{b^4}=\frac{(c-d)^4}{d^4}. \tag{2}$$

Поделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим

$$\frac{a^4-b^4}{(a-b)^4}=\frac{c^4-d^4}{(c-d)^4}.$$

84. Пусть $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, откуда $x=ak$, $y=bk$, $z=ck$. Сложив почленно последние три равенства, получим

$$x+y+z=k\cdot(a+b+c)=\frac{x}{a}\cdot(a+b+c).$$

Отсюда

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}, \text{ или } \frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}=\frac{x^2}{a^2}.$$

Умножив обе части последнего равенства на $x+y+z$, получим

$$\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{x^2(x+y+z)}{a^2}=\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^2y}{a^2}+\frac{x^2z}{a^2}. \tag{1}$$

Но из условия задачи следует, что $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$, поэтому равенство (1) принимает вид

$$\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2},$$

что и требовалось доказать.

85. Так как если $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, то $\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}$, поэтому данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{2(x^2+a^2)}{2ax}=\frac{x^2+a^2}{a^2-x^2},$$

или

$$x^2+ax-a^2=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{-a\left(1\pm\sqrt{5}\right)}{2}.$$

86. Перепишем данное уравнение в виде

$$x^2-2(5-y)x-y+y^2=0,$$

откуда

$$x=5-y\pm\sqrt{25-9y}. \qquad (1)$$

Так как число x должно быть целым, то необходимо, чтобы разность $25-9y$ была полным квадратом. Эта разность может быть полным квадратом только при $y=0$ и $y=1$.

Пусть $y=0$, тогда из (1) следует

$$x_1=10,\ x_2=0.$$

Теперь пусть $y=1$, тогда из (1) следует

$$x_3=8,\ x_4=0.$$

Итак, данное уравнение имеет четыре решения

$$\begin{cases}x_1=10,\\ y_1=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=8,\\ y_3=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=0,\\ y_4=1.\end{cases}$$

87. Имеем

$$N=a^2b(b^2-4)(a^2-1)(a^2+2),\ \text{или}$$

$$N=a^2b(a+1)(a-1)(b+2)(b-2)(a^2+2).$$

Если a — четное число, то a^2 делится на 4, а потому число a^2+2 делится на 2, следовательно, N кратно 8. Если a — нечетное число, то $a-1$ и $a+1$ два последовательных четных числа; поэтому одно из них делится на 2, а другое — на 4. Следовательно, и в этом случае N делится на 8.

Из трех последовательных четных или нечетных чисел $(b-2)$, b и $(b+2)$ одно и только одно делится на 3. В самом деле, если $b=3k$, то b делится на 3. Если $b=3k+1$, то $b+2=3(k+1)$ делится на 3. Если же $b=3k+2$, то $b-2=3k$ делится на 3. Если $a=3k$, то $a^2=9k^2$, т. е. a^2 делится на 9. Если же $a=3k\pm1$, то один из множителей $(a-1)$ или $(a+1)$ делится на 3; кроме того, тогда $a^2+2=(3k\pm1)^2+2=3(3k^2\pm2k+1)$ делится на 3. Таким образом, число N содержит три множителя, кратных 3, а потому оно делится на $3^3=27$. Итак, N делится на 8 и на 27; следовательно, N делится на $8\cdot27=216$, что и требовалось доказать.

88. Любое действительное целое число имеет вид $3k$, или $3k+1$, или $3k-1$. Если число имеет вид $3k$, то его квадрат $9k^2$ делится на 9. Если же число имеет вид $3k\pm1$, то его квадрат $(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3k(3k\pm2)+1$ при делении на 3 дает остаток 1. Итак, утверждение задачи верно.

89. Обозначим CM через x, высоту треугольника ABE через h_1, высоту треугольника CME через h_2 (рис. 14). По условию

$$\frac{1}{2}a\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot(h_1+h_2),$$

или

$$\frac{2a}{a+b}=\frac{h_1+h_2}{h_1}=1+\frac{h_2}{h_1}. \qquad (1)$$

Но из подобных треугольников ABE и CME имеем

$$\frac{x}{a}=\frac{h_2}{h_1}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{2a}{a+b}=1+\frac{x}{a};\quad \frac{x}{a}=\frac{a-b}{a+b};\quad x=a\cdot\frac{a-b}{a+b}.$$

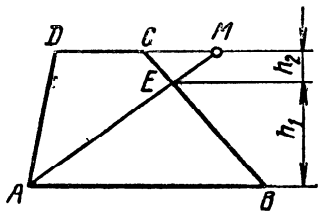

Рис. 14

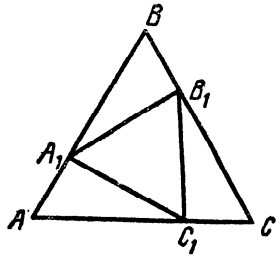

Рис. 15

Отв. Точка M находится на расстоянии $a\cdot\dfrac{a-b}{a+b}$ от точки C.

90. Пусть ABC — данный треугольник, у которого $AB=BC=AC=3$ и $A_1B_1C_1$ — вписанный в него треугольник (рис. 15), причем площадь S треугольника ABC равна утроенной площади S_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон, то

$$\frac{A_1C_1^2}{AC^2}=\frac{1}{3},$$

откуда

$$A_1C_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot AC=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3=\sqrt{3}.$$

Пусть $CC_1=AA_1=x$, тогда $AC_1=3-x$. Поскольку в треугольнике AA_1C_1 угол A_1AC_1 равен 60°, то

$$A_1C_1^2=AA_1^2+AC_1^2-AA_1\cdot AC_1,$$

или

$$3=x^2+(3-x)^2-x(3-x).$$

Отсюда $x_1=1$, $x_2=2$.

Отв. Расстояния от вершины A до вершин смежных углов равны 1 и 2.

91. Пусть C — пункт встречи парохода и лодки. Введем обозначения: 1 *ед/ч* — скорость течения, y *ед/ч* — собственная скорость парохода, z *ед/ч* — собственная скорость лодки, $AC=5x$ (*ед*), $CB=3x$ (*ед*). В силу условия задачи и введенных нами обозначений имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{8x}{y-1}+\dfrac{8x}{y+1}=\dfrac{8x}{z+1}, \\ \dfrac{5x}{y-1}=\dfrac{3x}{z+1}, \\ \dfrac{8x}{y-1}+\dfrac{8x}{y+1}-\dfrac{8x}{2z+1}=\dfrac{7}{6}. \end{cases}$$

(1 *ч* 10 *мин*$=7/6$ *ч*)

Так как $x\neq 0$, то первое и второе уравнения системы можно переписать в таком виде

$$\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}=\frac{1}{z+1}, \quad \frac{5}{y-1}=\frac{3}{z+1}.$$

Из второго уравнения имеем $z+1=\dfrac{3}{5}(y-1)$. Подставляя это значение $z+1$ в первое уравнение, получим $\dfrac{2y}{y^2-1}=\dfrac{5}{3(y-1)}$. Отсюда $y=5$, а поэтому $z=\dfrac{7}{5}$. Теперь, подставляя найденные значения y и z в третье уравнение системы и решая его, получим $x=\dfrac{19}{20}$.

Искомое время равно $\dfrac{8x}{y-1}+\dfrac{8x}{y+1}=\dfrac{16xy}{y^2-1}=\dfrac{38\cdot 10}{5\cdot 24}=\dfrac{19}{6}$ *ч*, т. е. равно 190 *мин*.

Отв. 190 *мин*.

92. Имеем

$$x+1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},$$

$$y=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2},$$

$$y+1=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}+\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}.$$

Таким образом,

$$(x+1)(y+1)=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}=2.$$

93. Перепишем данное уравнение в виде

$$4x^2 - 4x - 4\sqrt{y} + y + 4 + 1 = 0,$$

или

$$(2x - 1)^2 + \left(2 - \sqrt{y}\right)^2 = 0.$$

Так как $(2x-1)^2 \geqslant 0$ и $(2-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$, то

$$(2x - 1)^2 + \left(2 - \sqrt{y}\right)^2 = 0.$$

только тогда, когда

$$(2x - 1)^2 = 0 \text{ и } \left(2 - \sqrt{y}\right)^2 = 0,$$

откуда $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$.

94. Двузначное число имеет вид $10a+b$, где a и b — цифры ($a \neq 0$). Мы ищем такие двузначные числа, для которых $10a+b = nab$, где n — натуральное число. Разрешив это равенство относительно b, получим

$$b = \frac{10a}{na - 1}.$$

Если $a=1$, то $b = \frac{10}{n-1}$. Отсюда видно, что для того, чтобы b было целым (цифрой), необходимо, чтобы n было равно или 6, или 3, или 11. Следовательно, числа 11, 12, 15 удовлетворяют условию задачи.

Если $a=2$, то $b = \frac{20}{2n-1}$ и n равно только 3. Поэтому одно из искомых чисел есть 24.

Если $a=3$, то $b = \frac{30}{3n-1}$, а n равно только 2; поэтому имеем еще одно число 36. Легко убедиться, что при $n=4, 5, 6, 7, 8, 9$ число b не есть целое (цифра) ни при каких значениях n. Таким образом, имеются ровно 5 чисел (11, 12, 15, 24, 36), для которых выполняется условие задачи.

95. Пусть $AB=x$, $AC=y$. Так как $BD=DC$, то треугольник BDC (рис. 16) равнобедренный и углы при основании DBC и DCB равны, а так как BD есть биссектриса угла B, то эти углы равны углу ABD. Вследствие этого треугольники ABD и ABC подобны, как треугольники, имеющие по два равных угла, а именно: общий угол A и $\angle ABD = \angle ACB$. Итак, имеем

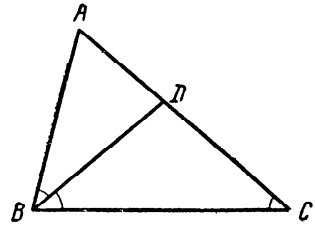

Рис. 16

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}=\frac{x}{y},\ \text{или}\ \frac{AD}{x}=\frac{x}{y}. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку BD есть биссектриса угла B, то

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{AD+DC}{AB+BC}=\frac{AC}{AB+BC},$$

или

$$\frac{AD}{x}=\frac{y}{x+a}. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{x+a},\ \text{или}\ y^2-x^2=ax. \tag{3}$$

Кроме того,

$$x+y=k. \tag{4}$$

Поделив почленно равенство (3) на (4), получим

$$y-x=\frac{ax}{k},\ \text{или}\ \frac{x}{k}=\frac{y}{a+k}=\frac{x+y}{a+2k}=\frac{k}{a+2k}.$$

Теперь легко найти значения x и y

$$x=\frac{k^2}{a+2k},\quad y=\frac{k(a+k)}{a+2k}.$$

Ясно, что должно иметь место соотношение

$$y-x<a<y+x,$$

т. е.

$$\frac{ak}{a+2k}<a<k.$$

Но так как $a>\frac{ak}{a+2k}$ всегда справедливо, то остается $a<k$.

96. Пусть v *км/ч* — скорость пассажирского поезда, u *км/ч* — скорость товарного поезда, x *км* — расстояние между городами A и B. В силу наших обозначений пассажирский поезд проходит расстояние AB за $\frac{x}{v}$ *ч*, а товарный — за $\frac{x}{u}$ *ч*. Так как пассажирский поезд проходит это расстояние на 4 *ч* быстрее товарного, то имеем

$$\frac{x}{u}-\frac{x}{v}=4.$$

Если бы каждый из поездов шел то время, которое тратит другой поезд на путь из A в B, то пассажирский поезд прошел бы $\frac{xv}{u}$ *км*,

а товарный $\frac{xu}{v}$ *км*. Так как по условию задачи пассажирский поезд прошел бы при этом на 280 *км* больше, чем товарный, имеем

$$\frac{xv}{u}-\frac{xu}{v}=280.$$

Если бы скорость каждого из поездов увеличилась на 10 *км/ч*, то пассажирский поезд проходил бы расстояние AB за $\frac{x}{v+10}$ *ч*, а товарный — за $\frac{x}{u+10}$ *ч*; следовательно, в силу условия задачи имеем

$$\frac{x}{u+10}-\frac{x}{v+10}=2\frac{24}{60}.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{vu}(v-u)=4,\\[2ex] \dfrac{x}{vu}(v^2-u^2)=280,\\[2ex] \dfrac{x}{(v+10)(u+10)}(v-u)=\dfrac{12}{5}.\end{cases}$$

Разделив почленно второе и третье уравнения на первое уравнение системы, получим

$$\frac{vu}{(v+10)(u+10)}=\frac{3}{5};\quad v+u=70.$$

Отсюда

$$\frac{vu}{vu+10(v+u)+100}=\frac{3}{5};\quad \frac{vu}{vu+800}=\frac{3}{5};\quad \begin{cases}v+u=70,\\ vu=1200.\end{cases}$$

Из последней системы находим $v=40$, $u=30$. Подставляя в одно из уравнений системы значения v и u, получим $x=480$.

Отв. 480 *км*.

97. Пусть скорость автобуса v *км/мин*, скорость легковой машины — u *км/мин*. В силу условия задачи следует, что расстояние AB равно $160v$ *км* и что автобусы выезжают через 8 *мин* один за другим. Легковая машина за t *мин* проходит расстояние ut *км* такое же, какое 20-й автобус преодолевает за $(t+8)$ *мин*. Следовательно,

$$ut=v(t+8).$$

В момент встречи легковой машины с 1-м автобусом расстояние между легковой машиной и 2-м автобусом равно $8v$ *км*. Через $(t-9)$ *мин* после этого 2-й автобус пройдет $(t-9)v$ *км*, а легковая машина $(t-9)\cdot u$ *км*; поэтому

$$(t-9)\cdot v+(t-9)\cdot u=8v.$$

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} ut = v(t+8), & (1) \\ u(t-9) = v(17-t). & (2) \end{cases}$$

Разделив почленно уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{t}{t-9} = \frac{t+8}{17-t}.$$

Положительный корень этого уравнения $t=12$ *мин*. Так как расстояние AB равно $160v$, а скорость легковой машины u, то легковая машина покрывает расстояние AB за $160\frac{v}{u}$ *мин*. Так как $t=12$, то из уравнения (1) находим $\frac{v}{u} = \frac{t}{t+8} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $160 \cdot \frac{v}{u} = 160 \cdot \frac{3}{5} = 96$, т. е. легковая машина проезжает расстояние AB за 1 *ч* 36 *мин*.

Отв. 1 *ч* 36 *мин*.

98. Из условия задачи следует, что $b(a+c)=2ac$. Поэтому левая часть доказываемого равенства

$$b^2(a-c)^2 = b^2(a^2-2ac+c^2) = 2b^2(a^2+c^2) - b^2(a+c)^2 =$$
$$= 2b^2(a^2+c^2) - 4a^2c^2 = 2[b^2(a^2+c^2) + 2a^2c^2 - 4a^2c^2] =$$
$$= 2[b^2(a^2+c^2) + 2a^2c^2 - 2abc(a+c)] = 2[c^2(b-a)^2 + a^2(c-b)^2],$$

что и требовалось доказать.

99. Из данной пропорции образуем производную пропорцию

$$\frac{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)}{(a+c)+(a-c)} = \frac{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)}{(a+c)-(a-c)}.$$

откуда $a=\frac{b^2}{c}$, или $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Далее, так как $b^2=ac$, то данную пропорцию можно переписать в таком виде

$$\frac{a^2+ac}{a+c} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-c}, \text{ или } \frac{a}{a+b} = \frac{a-b}{a-c}, \text{ или}$$

$$\frac{2a}{a+b} = \frac{2a-2b}{a-c};$$

Отсюда

$$\frac{2a-(a+b)}{2a} = \frac{2a-2b-(a-c)}{2a-2b}, \text{ или } \frac{a-b}{2a} = \frac{a-2b+c}{2(a-b)},$$

следовательно,

$$a-2b+c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{\left(\frac{b^2}{c}-b\right)^2}{\frac{b^2}{c}} = \frac{(b-c)^2}{c}.$$

100. Данное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + y^2 - 4y\sqrt{2} + 8 = 0,$$

или

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 0.$$

Поскольку $(x-\sqrt{2})^2 \geqslant 0$ и $(y-2\sqrt{2})^2 \geqslant 0$, то $(x-\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{2})^2 = 0$ только тогда, когда $x-\sqrt{2}=0$ и $y-2\sqrt{2}=0$. Отсюда $x=\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$.

101. Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1} = a(a-1),$$

или

$$\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} = a(a-1),$$

или

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - a(a-1) = 0,$$

откуда

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^2 - 4a}}{2} = \frac{1 \pm (2a-1)}{2}.$$

Решая эти два квадратных уравнения, получаем

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{a-2}}, \text{ где } a \neq 2, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \text{ где } a \neq -1.$$

Если $a=2$ или $a=-1$, то $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

102. Имеем $N=(x-1)^2+5x$. Так как N должно делиться на 5, то $x-1=5k$, где k — целое, т. е. $x=5k+1$. Тогда

$$N = (5k+1)^2 + 3(5k+1) + 1 = 25k^2 + 25k + 5 =$$
$$= 22k^2 + 22k + 11 + 3(k^2 + k - 2) = 11(2k^2 + 2k + 1) +$$
$$+ 3(k-1)(k+2).$$

Для делимости N на 11 необходимо и достаточно, чтобы $k-1$ или $k+2$ делились на 11. Поэтому возможны два случая:

а) $k-1=11t$, т. е. $k=11t+1$. Но так как $x=5k+1$, то $x=55t+6$;

б) $k+2=11t$, т. е. $k=11t-2$. Но поскольку $x=5k+1$, то $x=55t-9$. Таким образом, утверждение задачи верно.

103. Поскольку $N=3m+a$, $N=5n+b$, $N=7p+c$, то

$$a = N - 3m, \quad b = N - 5n, \quad c = N - 7p.$$

Поэтому

$70a + 21b + 15c - N = 70(N - 3m) + 21(N - 5n) + 15(N - 7p) - N = 105N - 105(2m + n + p)$, т. е. $70a + 21b + 15c - N$ делится на 105.

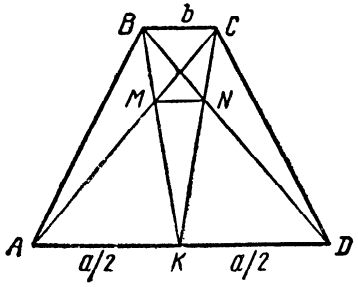

Рис. 17

104. Пусть точка K — середина большего основания AD трапеции (рис. 17). Из подобия треугольников AMK и BMC следует, что

$$\frac{MK}{BM} = \frac{a}{2b}, \qquad (1)$$

а из подобия треугольников MBN и KBD имеем

$$\frac{MN}{KD} = \frac{BM}{BK} = \frac{2b}{a + 2b}, \qquad (2)$$

так как из (1) следует, что

$$\frac{MK + BM}{BM} = \frac{a + 2b}{2b}.$$

Поскольку $KD = \frac{a}{2}$, то из равенства (2) получаем

$$MN = \frac{ab}{a + 2b}.$$

Отв. $MN = \frac{ab}{a+2b}$.

105. Обозначим искомый радиус OD через x. Тогда $OA = x+1$, $OB = x+2$, $OC = x+3$ (рис. 18). Площадь треугольника AOB (по формуле Герона)

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{(x+3) \cdot x \cdot 1 \cdot 2}.$$

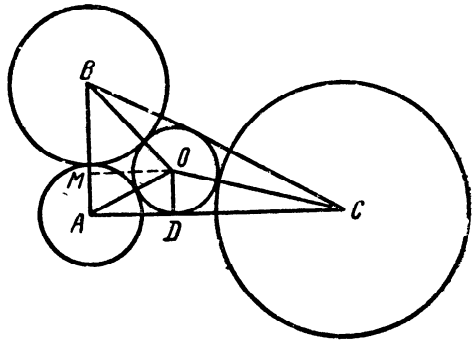

Рис. 18

Из треугольника AOC следует, что

$$OC^2 = AC^2 + AO^2 - 2AC \cdot AD,$$

или в силу введенных нами обозначений

$$x^2 + 6x + 9 = 36 + x^2 + 2x + 1 - 2 \cdot 6 \cdot AD.$$

Отсюда

$$AD = \frac{7 - x}{3}.$$

Площадь треугольника AOB

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot MO = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{7 - x}{3} = \frac{7 - x}{2}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем

$$\sqrt{2x(x + 3)} = \frac{7 - x}{2},$$

или

$$7x^2 + 38x - 49 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $x = \frac{8\sqrt{11} - 19}{7}$.

Отв. $\frac{8\sqrt{11} - 19}{7}$.

106. Пусть скорость лодки в стоячей воде v *км/ч*, а скорость течения u *км/ч* и пусть расстояние AB равно s *км*. За 5 *ч* лодка проплыла расстояние $5(v - u)$ *км*, а плот $5u$ *км* и так как через 5 *ч* они встретились, то сумма $5(v - u) + 5u$ равна AB, т. е.

$$s = 5u + 5(v - u).$$

Для прохождения пути из B в A лодка затратила $\frac{s}{v - u}$ *ч*, а для прохождения пути из A в B плот затратил $\frac{s}{u}$ *ч*. Поскольку по условию задачи они прибыли в B одновременно, то

$$\frac{s}{u} = \frac{s}{v - u} + \frac{s}{v + u}.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} s = 5u + 5(v - u), & (1) \\ \dfrac{s}{u} = \dfrac{s}{v - u} + \dfrac{s}{v + u}. & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) системы находим $v = \frac{s}{5}$. Подставив это значение v в уравнение (2), получим после преобразований

$$\left(\frac{s}{u}\right)^2 - 10 \cdot \frac{s}{u} - 25 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $\left(\text{относительно } \frac{s}{u}\right)$ равен $5(\sqrt{2}+1)$. Следовательно, время, затраченное плотом на прохождение пути из A в B, равно $5(\sqrt{2}+1)\,u$. Так как $5(\sqrt{2}+1) > 12$, то ясно, что плот и лодка не успеют прибыть в город B к 9 часам вечера того же дня.

107. Подставим $b = \frac{a+c}{2}$ и $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ в третье равенство, получим

$$\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\alpha+\gamma)^2} = \frac{a \cdot c \cdot \alpha \cdot \gamma}{(a+c)^2}, \text{ или } \frac{\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)^2} = \frac{ac}{(a+c)^2},$$

или

$$\frac{(\alpha+\gamma)^2}{\alpha\gamma} = \frac{(a+c)^2}{ac}, \text{ или } \frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\gamma} = \frac{a^2+c^2}{ac},$$

или $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.

108. Введем обозначение $z = \frac{x^2-6x-9}{x}$.

Правую часть уравнения перепишем так

$$\frac{x^2-6x-9+2x}{x^2-6x-9} = 1 + \frac{2x}{x^2-6x-9} = 1 + \frac{2}{z}.$$

Таким образом, данное уравнение можно переписать в виде

$$z = 1 + \frac{2}{z},$$

или

$$z^2 - z - 2 = 0,$$

откуда $z_1 = 2$, $z_2 = -1$.

Итак, имеем два уравнения

$$\frac{x^2-6x-9}{x} = 2 \text{ и } \frac{x^2-6x-9}{x} = -1,$$

или

$$x^2 - 8x - 9 = 0 \text{ и } x^2 - 5x - 9 = 0.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 9$, $x_2 = -1$, а из второго

$$x_{3;4} = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}.$$

109. Имеем $11^{10} - 1 = (121^5 - 21^5) + (21^5 - 1)$. Разность $121^5 - 21^5$ делится на $100 = 121 - 21$. Также разность $21^5 - 1 = (21-1) \cdot (21^4 + 21^3 +$

$+21^2+21+1$) делится на 100, так как каждое из пяти чисел 21^4, 21^3, 21^2, 21 и 1 оканчиваются цифрой 1, а поэтому их сумма оканчивается цифрой 5, а следовательно, $21^5-1=20\cdot 5\cdot k=100k$, где k — натуральное число.

110. На стороне прямоугольного треугольника ABC построены полуокружности AMC, ALB, BPC (рис. 19). Радиусы окружности, касающейся построенных полуокружностей, проведенные в точки касания, пересекают гипотенузу AC в точке F, а катеты AB и BC соответственно в точках E и D. Гипотенуза $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$. Отрезки ENF и FKD являются средними линиями в треугольнике ABC. Обозначим искомый радиус через x, центр окружности этого радиуса — через O. Имеем $OF=x-5$, $OE=x-4$, $OD=x-3$, $FD=\frac{AB}{2}=4$, $EF=\frac{BC}{2}=3$. Из центра O опустим перпендикуляры ON и OK на EF и FD. Из треугольника OEF следует, что

$$OE^2=EF^2+OF^2-2\cdot EF\cdot NF,$$

или

$$(x-4)^2=9+(x-5)^2-6\cdot NF,$$

откуда

$$NF=\frac{9-x}{3}.$$

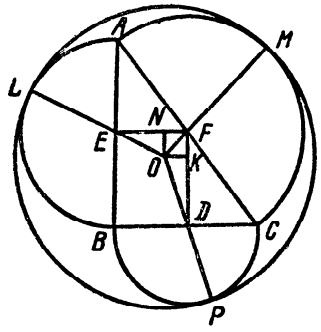

Рис. 19

Площадь треугольника FOD

$$S_{\Delta FOD}=\sqrt{(x-2)(x-6)\,3\cdot 1}\ \text{(по формуле Герона)}.$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta FOD}=\frac{1}{2}FD\cdot OK=\frac{1}{2}\cdot FD\cdot NF=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{9-x}{3}=\frac{2}{3}(9-x).$$

Следовательно, $\sqrt{3(x-2)(x-6)}=\frac{2}{3}(9-x)$, откуда $x=\frac{144}{23}$.

Отв. $\frac{144}{23}$ *см.*

111. Пусть скорость первого автобуса v *км/мин*, а второго u *км/мин* и пусть расстояние от A до B равно s *км*. Положим, что через t *мин* происходит встреча автобусов в первый раз. В первый раз до встречи первый автобус проехал vt *км*, а второй ut *км*, а вместе они покрыли путь, равный s. Следовательно, имеем

$$s=vt+ut. \qquad (1)$$

Во второй раз скорость первого автобуса стала $2v$ *км/мин*, а вто-

рого — прежней, т. е. u *км/мин*, и они встречаются через (t—56) *мин*. Значит,

$$s = 2v(t - 56) + u(t - 56). \qquad (2)$$

Если же скорость первого автобуса была бы прежней, т. е. v *км/мин*, а второго $2u$ *км/мин*, то время, затраченное ими до встречи, равно (t—65) *мин*. Следовательно,

$$s = v(t - 65) + 2u(t - 65). \qquad (3)$$

Обозначим через x *мин* то время, которое необходимо затратить до встречи автобусов, когда скорость первого автобуса равна $2v$ *км/мин*, а второго $2u$ *км/мин*. Тогда имеем

$$s = 2xv + 2xu. \qquad (4)$$

Таким образом, имеем систему из четырех уравнений (1)—(4) с пятью неизвестными.

Из уравнения (1) находим

$$t = \frac{s}{v + u},$$

а из уравнения (4) получаем

$$x = \frac{s}{2(v + u)}.$$

Следовательно,

$$t = 2x.$$

Исключая t из уравнений (1), (2) и (3), получим систему двух уравнений

$$\frac{sv}{(2v + u)(v + u)} = 56, \qquad (5)$$

$$\frac{su}{(v + 2u)(v + u)} = 65. \qquad (6)$$

Разделив почленно уравнение (5) на уравнение (6), получим

$$\frac{v(v + 2u)}{u(2v + u)} = \frac{56}{65},$$

или

$$56\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 18\frac{u}{v} - 65 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $\left(\text{относительно}\ \frac{u}{v}\right)$ $\frac{u}{v} = \frac{5}{4}$, откуда $u = \frac{5}{4}v$. Подставляя это значение u в уравнение (5), получим

$$\frac{sv}{\left(2v+\frac{5}{4}v\right)\left(v+\frac{5}{4}v\right)}=56.$$

Отсюда получаем

$$s=\frac{819}{2}v.$$

Теперь легко найти значение x. Имеем

$$x=\frac{s}{2(v+u)}=\frac{819v}{2\cdot 2\left(v+\frac{5}{4}v\right)}=91.$$

Таким образом, $x=1$ *ч* 31 *мин*, а $t=3$ *ч* 2 *мин*. Поскольку нам надо найти, в котором часу встретились бы автобусы, если их скорости были бы увеличены вдвое, то надо вычислить разность $12-(t-x)$.

$$12-(3\text{ ч }2\text{ мин}-1\text{ ч }31\text{ мин})=10\text{ ч }29\text{ мин}.$$

Отв. 10 *ч.* 29 *мин.*

112. Пусть $AB=2x$, скорость лодки, вышедшей из A, — v_1 *км/ч*, скорость лодки, вышедшей из B, — v_2 *км/ч*, скорость течения v_0 *км/ч*. Так как лодка, вышедшая из A, прошла половину пути за то же время, что и лодка, вышедшая из B, то и вторую половину пути они пройдут за одинаковое время, т. е. мгновенный поворот они сделали одновременно.

Поэтому, учитывая, что пути, пройденные лодками за одно и то же время, пропорциональны их скоростям, получим

$$v_1-v_0=v_2+v_0, \tag{1}$$

$$\frac{v_1+v_0}{v_2-v_0}=\frac{x+20}{x-20}, \tag{2}$$

$$\frac{v_1-v_0}{v_2-v_0}=\frac{2x+150}{150}. \tag{3}$$

Из (1) имеем $v_1=v_2+2v_0$, а поэтому из (2) и (3) следует, что

$$\frac{v_2+3v_0}{v_2-v_0}=\frac{x+20}{x-20}, \tag{4}$$

$$\frac{v_2+v_0}{v_2-v_0}=\frac{x+75}{75}. \tag{5}$$

Умножая обе части (4) на -1, а (5) на 2 и потом сложив их почленно, получим

$$1=\frac{2x+150}{75}-\frac{x+20}{x-20},$$

или

$$x^2 - 20x - 1500 = 0,$$

откуда

$$x = 10 + \sqrt{100 + 1500} = 10 + 40 = 50.$$

Следовательно, $AB = 2x = 100$ *км*.

113. Преобразуем знаменатель левой части доказываемого равенства Имеем

$$bcy^2 + bcz^2 - 2bcyz + acz^2 + acx^2 - 2acxz + abx^2 + aby^2 -$$
$$- 2abxy = c(ax^2 + by^2) + b(ax^2 + cz^2) + a(by^2 + cz^2) -$$
$$- 2bcyz - 2acxz - 2abxy = c(ax^2 + by^2 + cz^2) - c^2z^2 +$$
$$+ b(ax^2 + by^2 + cz^2) - b^2y^2 + a(ax^2 + by^2 + cz^2) - a^2x^2 -$$
$$- 2bcyz - 2acxz - 2abxy = (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) -$$
$$- (ax + by + cz)^2 = (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2),$$

так как по условию $ax + by + cz = 0$.

Поэтому

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2} =$$
$$= \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2)} = \frac{1}{a + b + c},$$

что и требовалось доказать.

114. Третье из данных равенств перепишем в виде $2 + \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha\gamma} = 2 + \frac{a^2 + c^2}{ac}$, или $\frac{(\alpha + \gamma)^2}{\alpha\gamma} = \frac{(a + c)^2}{ac}$. Но так как $a + c = 2b$, $\alpha + \gamma = \frac{2\alpha\gamma}{\beta}$, то последнее равенство принимает вид $\frac{\alpha\gamma}{\beta^2} = \frac{b^2}{ac}$, откуда $b^2\beta^2 = ac \cdot \alpha\gamma$, что и требовалось доказать.

115. Так как $x^2 = |x|^2$, то данное уравнение можно переписать в виде $|x|^2 + |x| + a = 0$. Если $a = 0$, то $x = 0$. Если $a > 0$, то уравнение не имеет решений, так как $|x|^2 + |x| + a > 0$. Наконец, если $a < 0$, то корни уравнения разных знаков; но поскольку $|x| \geqslant 0$, то надо взять только положительный корень $|x| = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$.

Отв. Если $a \leqslant 0$, то $x = \pm\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$, а если $a > 0$, то нет решений.

116. Должно быть $\frac{a-x}{1+x}>0$, или $\frac{x-a}{x+1}<0$, т. е. если $a<-1$, то $a<x<-1$, а если $a>-1$, то $-1<x<a$. Обозначим $\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}}$ через z, $(z>0)$. Тогда имеем $z-\frac{1}{z}=2$, или $z^2-2z-1=0$. Отсюда $z=1+\sqrt{2}$, т. е. $\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}}=1+\sqrt{2}$, следовательно, $\frac{a-x}{1+x}=\left(1+\sqrt{2}\right)^4$.

Отсюда находим $x=\frac{a-\left(1+\sqrt{2}\right)^4}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^4}$. Если мы рассматриваем случай, когда $a<-1$, т. е. $a<x<-1$, то должно иметь место соотношение

$$a<\frac{a-\left(1+\sqrt{2}\right)^4}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^4}<-1.$$

Оба эти неравенства выполняются. Действительно, неравенство $a<\frac{a-\left(1+\sqrt{2}\right)^4}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^4}$ можно переписать в виде $(a+1)(1+\sqrt{2})^4<0$, которое в силу условия $a<-1$ выполняется. Далее, неравенство $\frac{a-\left(1+\sqrt{2}\right)^4}{1+\left(\sqrt{2}+1\right)^4}<-1$ также выполняется, так как его можно переписать в таком виде $\frac{a+1}{1+\left(\sqrt{2}+1\right)^4}<0$, что верно, так как $a<-1$.

Пусть теперь $a>-1$, т. е. $(-1<x<a)$. Имеем $x+1=\frac{a+1}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^4}>0$, так как $a>-1$; $a-x=\frac{(a+1)\left(1+\sqrt{2}\right)^4}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^4}>0$, т. е. условие $-1<x<a$ выполняется. Наконец, если $a=-1$, то и $x=-1$, а $x=-1$ не удовлетворяет уравнению.

Отв. При любом $a\neq-1$ уравнение имеет корень $\frac{a-\left(1+\sqrt{2}\right)^4}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^4}$, а при $a=-1$ нет решения.

117. Имеем $2^{55}+1=(2^5)^{11}+1=32^{11}+1^{11}$. Так как сумма нечетных степеней делится на сумму оснований, то рассматриваемая сумма делится на $32+1=33$.

118. Имеем $N=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})$. Но так как $(2222^{5555}+4^{5555})$ делится на $2222+4=2226=7\cdot318$, $(5555^{2222}-4^{2222})$ делится на $5555-4=5551=7\cdot793$, $(4^{5555}-4^{2222})=4^{2222}(4^{3333}-1)=4^{2222}(64^{1111}-1)$ делится на $64-1=63=7\cdot9$, то число делится на 7, что и требовалось доказать.

119. Пусть DE — диаметр окружности, перпендикулярный к касательной T и пересекающий прямую l в точке F (рис. 20). Имеем $FD=x$. Из треугольника EMD, имеющего прямой угол при вершине M, получаем

$$MF^2 = FD \cdot FE = x(2R - x);$$

$$MF = \sqrt{x(2R-x)};\ MN = 2\sqrt{x(2R-x)}.$$

С другой стороны, из подобия треугольников APQ и ABC следует

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AG}{AH},\ \text{или}\ \frac{PQ}{a} = \frac{2R-x}{2R},$$

$$\text{откуда}\ PQ = \frac{a(2R-x)}{2R}.\ \text{Поскольку}\ \frac{MN}{PQ} = k,\ \text{то}$$

$$\frac{2\sqrt{x(2R-x)}}{\frac{a(2R-x)}{2R}} = k,\ \text{или}\ 4R\sqrt{x(2R-x)} = ak(2R-x),$$

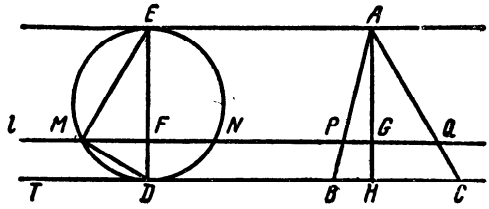

Рис. 20

или, наконец, возведя в квадрат обе части этого уравнения, имеем

$$16R^2x(2R-x) = a^2k^2(2R-x)^2.$$

Так как значение x должно заключаться между 0 и $2R$, то $2R-x$ должно быть положительно. Следовательно, можно разделить обе части уравнения на $2R-x$. Имеем

$$16R^2x = a^2k^2(2R-x),$$

откуда

$$x = \frac{2a^2k^2R}{16R^2 + a^2k^2}.$$

Так как полученное значение x заключается между 0 и $2R$, то оно удовлетворяет условию задачи.

120. Пусть равнобедренный треугольник ABC ($AC=BC$) вписан в окружность с центром O (рис. 21). Из центра O опустим перпендикуляр OE на AC. Поскольку треугольник AOC равнобедренный, то

точка E — середина AC и в силу условия задачи $EC=AB$. Поскольку прямоугольные треугольники COE и CAB подобны, то $OE=\frac{1}{4}$, а потому $CE=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначая через r радиус этой окружности, имеем $\frac{AC}{AD}=4=\frac{CO_1}{DO_1}=$ $=\frac{CO_1}{r}$. Отсюда $CO_1=4r$, а следовательно, $OD=5r-1$. Далее, так как $AD=\frac{EC}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ и $AO=1$, то из прямоугольного треугольника AOD следует $(5r-1)^2=1^2-\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$, или $5r-1=\frac{7}{8}$. Отсюда искомый радиус $r=\frac{3}{8}$.

Отв. $\frac{3}{8}$.

121. Пусть N — один из шести человек. Если N знаком не более чем с двумя из этой шестерки, то среди наших шести человек имеются три незнакомых с N. Если все эти люди знакомы друг с другом, то они уже образуют тройку попарно знакомых между собой; если же какие-нибудь два человека из них не знакомы друг с другом, то они вместе с N составляют тройку, никакие два из которых не знакомы между собой. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда N знаком более чем с двумя людьми. В таком случае найдутся три человека, с которыми N знаком. Если никакие два из этих трех человек не знакомы друг с другом, то мы уже имеем тройку попарно незнакомых людей. Наконец, если какие-либо два из этих людей знакомы, то вместе с N они образуют тройку попарно знакомых людей. Итак, утверждение задачи верно.

122. В силу свойства ряда равных отношений, каждое из данных отношений равно

$$\frac{(3x+2y)+(3y+2z)+(3z+2x)}{(3a-2b)+(3b-2c)+(3c-2a)}=\frac{5(x+y+z)}{a+b+c}.$$

Также каждое из данных отношений равно

$$\frac{(3x+2y)+2(3y+2z)+3(3z+2x)}{(3a-2b)+2(3b-2c)+3(3c-2a)}=\frac{9x+8y+13z}{5c+4b-3a}.$$

Следовательно,

$$\frac{5(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{9x+8y+13z}{5c+4b-3a},$$

откуда

$$5(x+y+z)(5c+4b-3a)=(9x+8y+13z)(a+b+c).$$

123. Сразу заметим, что $x\neq 0$, так как при $x=0$ получаем $-1=-\frac{1}{2}$. Если $x>0$, то данное уравнение перепишется в виде $(x+1)(x-1)=-\frac{1}{2}$, или $x^2=\frac{1}{2}$. Отсюда $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Если же $x<0$,

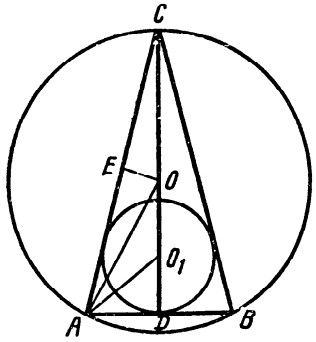

Рис. 21

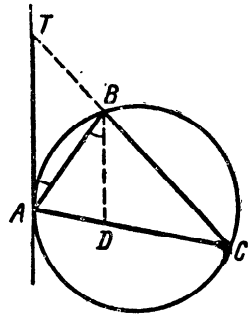

Рис. 22

то данное неравенство принимает вид $(x+1)^2=\frac{1}{2}$. Отсюда $x+1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $x_2=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-1$, $-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

124. Имеем $N=(3^3)^{35}+(4^3)^{35}$. Следовательно, N делится на $3^3+4^3=91=13\cdot 7$, а потому N делится на 13. Теперь представим число N в виде $(3^7)^{15}+(4^7)^{15}$. Значит, N делится на $3^7+4^7=49\cdot 379$, а потому число N делится на 49 и на 379. Наконец, имеем $N=(3^5)^{21}+(4^5)^{21}$. Следовательно, число N делится на $3^5+4^5=7\cdot 181$, а потому N делится на 181.

125. Проводим BD параллельно AT, где D — точка на AC (рис. 22). Так как угол BAT равен углу ABD как внутренние накрест лежащие при параллельных, а угол ACB равен углу BAT как измеряющиеся половиной дуги AB, то угол ABD равен углу ACB. Поэтому треугольники ABD и ABC подобны (у них угол A общий). Из их подобия следует

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{AD}{c}=\frac{c}{b},$$

откуда

$$AD = \frac{c^2}{b}.$$

Далее,

$$DC = AC - AD = b - \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 - c^2}{b}.$$

Так как $BD \| AT$, то

$$\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{BT}, \quad \frac{\frac{b^2 - c^2}{b}}{b \cdot \frac{c^2}{b}} = \frac{a}{BT},$$

откуда

$$BT = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}.$$

Имеем

$$AT^2 = BT \cdot TC = \frac{ac^2}{b^2 - c^2} \cdot \left(a + \frac{ac^2}{b^2 - c^2}\right) =$$

$$= \frac{ac^2}{b^2 - c^2} \cdot \frac{ab^2}{b^2 - c^2} = \frac{(abc)^2}{(b^2 - c^2)^2},$$

откуда $AT = \dfrac{abc}{|b^2 - c^2|}$.

126. Пусть скорость первой группы относительно берегов v_1 *км/ч*, а скорость второй группы — v_2 *км/ч*. Так как вторая группа за 1,5 *ч* прошла 15 *км*, то имеем $1{,}5\, v_2 = 15$. Согласно условию задачи, первая группа может пройти 10 *км* за $\dfrac{10}{v_1}$ *ч*, а вторая — за $\dfrac{10}{v_2}$ *ч*. В силу условия, если первая группа выйдет на 1 *ч* раньше второй, то группы встретились бы посредине между A и B, следовательно, $\dfrac{10}{v_1} = \dfrac{10}{v_2} + 1$.

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}5 v_2 = 15, \\ \dfrac{10}{v_1} = \dfrac{10}{v_2} + 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $v_1 = 5$ *км/ч*, $v_2 = 10$ *км/ч*. До встречи в пункте C лодки двигались $\dfrac{20}{v_1 + v_2} = \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$ *ч*. Значит, расстояние

$$AC = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3}\ км = 6\frac{2}{3}\ км.$$

Отв. 5 *км/ч*, 10 *км/ч*, $6\frac{2}{3}$ *км*.

127. Пусть x и y — целые числа, их разность d, остаток от деления x на d есть r. Имеем $x=y+d$. Разделив первое число (x) на d, получим

$$x = kd + r, \tag{1}$$

где k — частное. Таким образом,

$$kd + r = y + d,$$

откуда находим

$$y = (k - 1)\, d + r. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что при делении x и y на их разность частные отличаются на единицу, а остатки равны между собой.

128. Согласно условию задачи, имеем

$$2a = b + c \text{ и } c = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Второе соотношение перепишем в виде $c(a+b)=2ab$. Но так как $2a=b+c$, то $(b+c)b=c(a+b)$, или $ac+bc=b^2+bc$. Отсюда $ac=b^2$, т. е. b есть среднее геометрическое чисел a и c. Теперь докажем вторую часть задачи. Имеем $2a=b+c=b+\frac{2ab}{a+b}$. Отсюда $(2a-b)(a+b)=2ab$, или $b^2+ab-2a^2=0$, или $(b-a)\cdot(b+2a)=0$. Следовательно, либо $b=a$, либо $b=-2a$. Если $b=a$, то из равенства $2a=b+c$ находим, что и $c=a$. Значит, в этом случае $a:b:c=1:1:1$. Если же $b=-2a$, то из равенства $2a=b+c$ получаем $c=4a$. Таким образом, в этом случае $a:b:c=1:-2:4$.

129. Согласно условию задачи имеем

$$b = \frac{a+c}{2},\ c = \sqrt{bd},\ d = \frac{2}{\frac{1}{c} + \frac{1}{e}},$$

или

$$2b = a + c,\ c^2 = bd,\ d = \frac{2ce}{c+e}.$$

Из второго равенства имеем $2c^2=2bd$. Но, учитывая первое и третье равенства, находим

$$2c^2 = (a + c)\cdot\frac{2ce}{c+e}, \text{ или } 2c^3 + 2c^2 e = 2ace + 2c^2 e.$$

Отсюда $c^2=ae$, т. е. c есть среднее геометрическое чисел a и e.

130. Так как при любом значении x выражение $\sqrt{|x|+1}$ больше $\sqrt{|x|}$, т. е. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}>0$, то уравнение может иметь решения только при $a>0$. Итак, $a>0$. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{|x|+1} = \sqrt{|x|} + a.$$

Так как при любом значении x обе части этого уравнения положительны, то уравнение

$$\left(\sqrt{|x|+1}\right)^2=\left(\sqrt{|x|}+a\right)^2$$

эквивалентно данному, или

$$|x|+1=|x|+2a\sqrt{|x|}+a^2,$$

или

$$2a\sqrt{|x|}=1-a^2.$$

Поскольку при любом значении x ($a>0$) левая часть последнего уравнения неотрицательна, то $1-a^2\geqslant 0$, т. е. $0<a\leqslant 1$. Тогда последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$4a^2|x|=(1-a^2)^2,$$

откуда

$$|x|=\frac{(1-a^2)^2}{4a^2},\text{ а следовательно,}$$

$$x=\pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}.$$

Отв. Если $a=1$, то данное уравнение имеет единственное решение $x=0$, а если $0<a<1$, то — два корня $x=\pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$. При других значениях a уравнение не имеет корней.

131. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{x}\left(x^2\sqrt{x}-4x\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2x-2\right)=0.$$

Таким образом, данное уравнение разбивается на два: $\sqrt{x}=0$, откуда $x_1=0$ и

$$x^2\sqrt{x}-4x\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2x-2=0.$$

Преобразуем левую часть последнего уравнения

$$x^2\sqrt{x}-x\sqrt{x}-3x\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2x-2=x\sqrt{x}\cdot(x-1)-$$
$$-3\sqrt{x}\cdot(x-1)+2(x-1)=(x-1)\left(x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2\right).$$

Итак, $x-1=0$, откуда $x_2=1$ и $x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2=0$, или $x\sqrt{x}-\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2=0$, или $\sqrt{x}\cdot(x-1)-2(\sqrt{x}-1)=0$, или $\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)-2(\sqrt{x}-1)=0$, т. е.

$$\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}-2\right)=0.$$

Отсюда $\sqrt{x}-1=0$, $x_3=1$ и $x+\sqrt{x}-2=0$, откуда $x_4=1$. Итак, уравнение имеет 2 различных решения $x_1=0$, $x_2=1$.

132. Так как числа 43^{23} и 23^{43} нечетные, то их сумма четное число, а потому $43^{23}+23^{43}$ делится на 2. Таким образом, остается доказать, что $43^{23}+23^{43}$ делится на 33, т. е. делится на 3 и на 11. Имеем

$$43^{23} = (42+1)^{23} = 42k+1 = 3\cdot 14k+1, \quad (1)$$

$$43^{23} = (44-1)^{23} = 44m-1 = 11\cdot 4m-1, \quad (2)$$

$$23^{43} = (24-1)^{43} = 24n-1 = 3\cdot 8n-1, \quad (3)$$

$$23^{43} = (22+1)^{43} = 22l+1 = 2\cdot 11l+1. \quad (4)$$

Сложив почленно равенства (1) и (3), получим $43^{23}+23^{43}=3(14k+8n)$, т. е. данная сумма делится на 3.

Сложив почленно равенства (2) и (4), находим $43^{23}+23^{43}=11(4m+2l)$, т. е. исследуемая сумма делится и на 11.

133. Если $n=0$, то данное выражение равно нулю, а потому оно делится на любое целое число. Остается доказать, что при любом нечетном n предложенное выражение делится на 56. Имеем $3^n(13^n-10^n-6^n)+65^n = 39^n-30^n-18^n+65^n = 3^n(13^n-6^n)+5^n(13^n-6^n) = (5^n+3^n)(13^n-6^n)$. Сумма 5^n+3^n при нечетном n делится на сумму $5+3=8$, а разность 13^n-6^n делится на разность $13-6=7$ при любом целом неотрицательном n. Следовательно, данное выражение делится на произведение $7\cdot 8=56$ при любом нечетном n.

134. Соединим центр круга O (рис. 23) с вершинами A, B, C треугольника ABC и с точками касания D, E, F. Тогда $OA\perp EF$, $OB\perp FD$ и $OC\perp DE$. Двойная площадь прямоугольного треугольника AOE равна

$$AE\cdot OE, \text{ или } OA\cdot\frac{EF}{2}.$$

Следовательно,

$$AE\cdot OE = OA\cdot\frac{EF}{2},$$

откуда

$$EF = 2\cdot\frac{AE\cdot OE}{OA}.$$

Известно, что радиус вписанного круга

$$OE = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где $a+b+c=2p$.

Из рисунка видим, что

$$AE+CD=b,\ CD+BF=a,\ BF+AE=c,$$

следовательно,

$$AE+CD+BF=p$$

и

$$AE=p-a,\ CD=p-c,\ BF=p-b.$$

Таким образом,

$$OA = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}},$$

поэтому

$$EF = 2\,(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}.$$

Аналогично можно найти FD и ED.

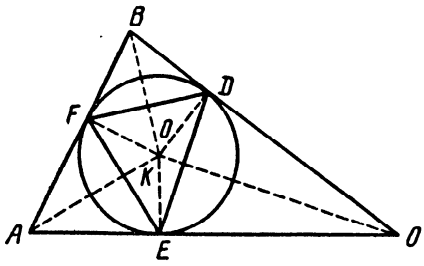

Рис. 23

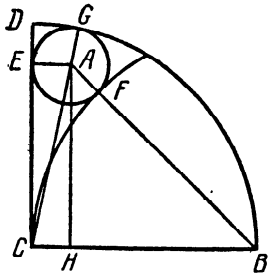

Рис. 24

135. Соединим центр A круга искомого радиуса x с центрами B, C дуг, к которым он прикасается в точках F, G и с точкой E, в которой он прикасается к отрезку CD (рис. 24). В треугольнике ABC имеем

$$AB = BF + AF = R + x,$$
$$AC = CG - AG = R - x,$$
$$BC = R.$$

Кроме того, проведя высоту AH, найдем

$$CH = AE = x.$$

По известной теореме имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CH,$$

или

$$(R + x)^2 = (R - x)^2 + R^2 - 2Rx,$$
$$R^2 + 2Rx + x^2 = R^2 - 2Rx + x^2 + R^2 - 2Rx,$$
$$6Rx = R^2,$$

откуда $x = \frac{1}{6}R$.

Отв. $\frac{R}{6}$.

136. Возведя обе части второго уравнения системы в квадрат, получим

$$x^4+x^2y^2+y^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3=49.$$

Но так как $x^4+x^2y^2+y^4=91$, то

$$xy(x^2+y^2-xy)=21.$$

Поскольку $x^2+y^2-xy=7$, то $xy=3$ и $y=\frac{3}{x}$. Подставляя это значение y во второе уравнение системы, получим биквадратное уравнение $x^4-10x^2+9=0$. Решая это уравнение, находим $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=1$, $x_4=-1$. Соответствующие им значения y таковы: $y_1=1$, $y_2=-1$, $y_3=3$, $y_4=-3$. В процессе решения мы могли получить лишние решения, а потому следует произвести проверку, удовлетворяют ли найденные пары чисел данной системе. Подстановкой убеждаемся, что все найденные четыре пары чисел удовлетворяют каждое из уравнений системы. Итак, данная система имеет четыре решения.

137. Условие задачи можно привести к такому виду

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=0.$$

Отсюда следует, что или $a=b$, или $b=c$, или $c=a$, т. е. из чисел a, b, c хотя бы два равны между собой.

138. Пусть $\sqrt[3]{x+1}=y$, т. е. $x+1=y^3$. В силу этого данное уравнение перепишется в виде

$$8y=\frac{32y^3-1}{2y^3+3y-1},$$

или

$$16y^4-32y^3+24y^2-8y+1=0.$$

Сделав замену $2y=z$, получим

$$z^4-4z^3+6z^2-4z+1=0,$$

или

$$(z-1)^4=0.$$

Отсюда $z=1$, а потому $y=\frac{1}{2}$. Следовательно, $x=-\frac{7}{8}$. Проверкой убеждаемся, что $x=-\frac{7}{8}$ действительно является корнем данного уравнения.

139. Так как при $n=0$ рассматриваемое выражение равно нулю, то оно делится на 6. Пусть теперь n — любое нечетное положительное число. Имеем $n(n^2+5^n)=n^3+n\cdot 5^n=n^3-n+n\cdot 5^n+n=n(n^2-1)+n(5^n+1)=(n-1)n(n+1)+n(5^n+1^n)$. Произведение $(n-1)n(n+1)$ кратно шести при любом целом n, так как его сомножители являются тремя последовательными числами. Сумма 5^n+1^n делится на $5+1=6$, так как n — нечетное число. Итак, рассматриваемое выражение делится на 6 при любом положительном нечетном n, а также при $n=0$.

140. Для удобства будем считать, что одна из окружностей неподвижна, а вторая движется с удвоенной скоростью (так как окружности катятся с одинаковыми скоростями).

Пусть первоначально окружность O_1 касается прямой в точке B, а в момент прикосновения к окружности O — в точке C (рис. 25). Конечное положение центра O_1 обозначим через O_2, а точку касания окружности O с прямой — через A. Проведем прямую O_1O_2K и соединим O с O_1 и с O_2.

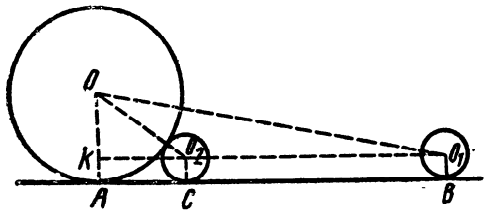

Рис. 25

Так как $OA=12$ *м*, а $BO_1=3$ *м*, то $OK=9$ *м*.

Из прямоугольного треугольника O_1KO имеем

$$O_1K=\sqrt{OO_1^2-OK^2}=\sqrt{41^2-9^2}=40\ (м).$$

Из прямоугольного треугольника O_2KO находим

$$O_2K=\sqrt{O_2O^2-OK^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12\ (м).$$

Окружность O_1 сместилась на расстояние

$$BC=O_1O_2=O_1K-O_2K=40-12=28\ (м).$$

Поскольку окружности катились со скоростями 1 *м/мин*, то их суммарная скорость 2 *м/мин* и время их движения равно $28:2=14$ *мин*.

141. Второе уравнение системы перепишем в виде $3x+5y=24-x(x+1)$. Подставив это значение $3x+5y$ в первое уравнение системы, получим

$$x(x+1)[24-x(x+1)]=144,\ \text{или}\ x^2(x+1)^2-$$
$$-24x(x+1)+144=0.$$

Таким образом, мы получили квадратное уравнение относительно $x(x+1)$. Решая его, найдем $x(x+1)=12$, откуда $x_1=3$, $x_2=-4$. Соответствующие им значения y: $y_1=0{,}6$, $y_2=4{,}8$.

142. Данную систему перепишем в виде

$$\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=9, & (1)\\ y(x+y)^2=9. & (2)\end{cases}$$

Поделив почленно уравнение (1) на (2), получим $\dfrac{x^2-xy+y^2}{y(x+y)}=1$,

или $x^2-2xy=0$. Отсюда получаем или $x=0$, или $x=2y$. Подставляя $x=0$ в первое уравнение системы, получим $y=\sqrt[3]{9}$. Теперь, подставляя $x=2y$ также в первое уравнение системы, находим $9y^3=9$, или $y=1$, а соответствующее значение $x=2$. Итак, данная система имеет два действительных решения: $x_1=0$, $y_1=\sqrt[3]{9}$ и $x_2=2$, $y_2=1$.

143. Предположим противное, т. е.

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=1.$$

Но так как по условию $ad-bc=1$, то

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=ad-bc.$$

Это равенство перепишем последовательно так

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2ab+2cd+2bc-2ad=0,$$

$$(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2cd+d^2)+$$
$$+(a^2-2ad+d^2)=0,$$
$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2=0.$$

Поскольку сумма квадратов действительных чисел равна нулю только тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю, то

$$a+b=b+c=c+d=a-d=0,$$

откуда

$$a=-b=c=-d=-a.$$

Последние равенства возможны лишь тогда, когда $a=b=c=d=0$, что противоречит условию $ad-bc=1$. Следовательно, утверждение задачи верно.

144. Так как $a+b+c=0$, то имеем

$$(a+b+c)(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0,$$

или

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+ab(\alpha+\beta)+ac(\alpha+\gamma)+bc(\beta+\gamma)=0.$$

Но в силу условия задачи

$$\alpha+\beta=-\gamma,\quad \alpha+\gamma=-\beta,\quad \beta+\gamma=-\alpha,$$

поэтому

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma-ab\gamma-ac\beta-bc\alpha=0,$$

или

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma-abc\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)=0,$$ и

так как $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0$, то имеем

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma=0,$$

что и требовалось доказать.

145. Пусть $x_1=1+\sqrt{2}$. Тогда $x_1^2=3+2\sqrt{2}$, $x_1^3=7+5\sqrt{2}$, $x_1^4=17+12\sqrt{2}$, $x_1^5=41+29\sqrt{2}$. Подставляя эти значения в данное уравнение, получим

$$41+29\sqrt{2}+a\left(7+5\sqrt{2}\right)+b\left(3+2\sqrt{2}\right)+$$
$$+5\left(1+\sqrt{2}\right)+2=0,$$

или

$$(7a+3b+48)+(5a+2b+34)\sqrt{2}=0.$$

Поскольку a и b рациональные числа, то последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда выполняется система

$$\begin{cases}7a+3b+48=0,\\5a+2b+34=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a=-6$, $b=-2$. Следовательно, данное уравнение такое

$$x^5-6x^3-2x^2+5x+2=0.$$

Так как $x_1=1+\sqrt{2}$, то $x_2=1-\sqrt{2}$. Поскольку число 2 имеет своими делителями числа ±1 и ±2, то легко путем проб найти остальные корни.

Отв. $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=-2$; $x_{4,5}=\pm1$.

146. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. При $x=0$ имеем $f(0)=c$, а при $x=1$ имеем $f(1)=a+b+c$.

Пусть $c(a+b+c)<0$, т. е. $f(0)\cdot f(1)<0$. При этом условии $f(0)$ и $f(1)$ имеют различные знаки. Следовательно, имеется такое значение $x=x_0$, при котором $f(x_0)=0$, т. е. данное уравнение имеет действительный корень, а значит и второй корень также действительный. (В противном случае оба корня были бы мнимыми.)

147. Имеем $35^n-2\cdot5^n+11^n=(5\cdot7)^n-5^n+11^n-5^n=5^n(7^n-1^n)+(11^n-5^n)$. Так как 7^n-1^n и 11^n-5^n являются разностями одинаковых степеней, то они делятся на разности их оснований $7-1=11-5=6$. Поэтому и выражение $5^n(7^n-1)+(11^n-5^n)$ делится на 6.

148. Имеем $N=9^{n+1}-2^{n+1}$ — разность одинаковых степеней двух чисел, а поэтому число N делится на разность $9-2=7$.

149. Пусть $OC=x$. Имеем (рис. 26) $CD^2=OD^2-OC^2=R^2-x^2$, $CD=\sqrt{R^2-x^2}$, $CB=R-x$. С другой стороны, из треугольника ODE, имеющего прямой угол при вершине D, имеем $OD^2=OC\cdot OE$, или $R^2=x\cdot OE$, $OE=\dfrac{R^2}{x}$. Следовательно,

$$DE^2=OE^2-OD^2=\frac{R^4}{x^2}-R^2=\frac{R^2(R^2-x^2)}{x^2},$$

$$DE=\frac{R}{x}\sqrt{R^2-x^2}.$$

Подставим в соотношение, данное в условии, вместо CD, CB и DE их выражения, получим

$$\frac{R}{x}\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-x^2}+R-x,$$

или

$$\left(\frac{R}{x}-1\right)\cdot\sqrt{R^2-x^2}=R-x,\quad\frac{(R-x)\sqrt{R^2-x^2}}{x}=R-x.$$

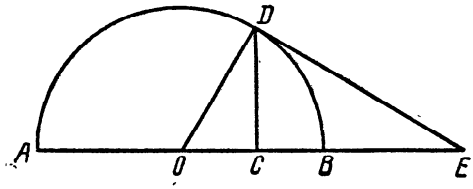

Рис. 26

Разделим обе части этого уравнения на $R-x$. Этим мы отбрасываем решение $R-x=0$, т. е. $x=R$, которое соответствует случаю, когда CD, CB и DE равны нулю. Таким образом, остается уравнение

$$\sqrt{R^2-x^2}=x,\quad R^2-x^2=x^2,$$

откуда

$$x=\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Полученное значение x удовлетворяет условию задачи, так как

$$0<\frac{R}{\sqrt{2}}<R.$$

150. Известно, что $r=\dfrac{S}{p}$, где S — площадь, а p — полупериметр треугольника; $R=\dfrac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника. Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника x, а основание y, тогда

$$S=\frac{y}{2}\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}},\quad p=x+\frac{y}{2},\quad abc=x^2y.$$

Таким образом,

$$r=\frac{y\sqrt{4x^2-y^2}}{2(2x+y)},\quad R=\frac{x^2}{\sqrt{4x^2-y^2}}. \qquad (1)$$

Поделив почленно эти равенства, получим

$$\frac{r}{R}=\frac{(4x^2-y^2)\,y}{2x^2(2x+y)}=\frac{(2x-y)\,y}{2x^2},$$

т. е.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\cdot\frac{y}{x}+2\,\frac{r}{R}=0.$$

Отсюда

$$\frac{y}{x}=1\pm\sqrt{1-\frac{2r}{R}}=1\pm\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$y_1=\frac{3}{2}\,x_1;\quad y_2=\frac{1}{2}\,x_2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует $x_1=4\sqrt{7}$, $y_1=6\sqrt{7}$; $x_2=4\sqrt{15}$; $y_2=2\sqrt{15}$.

151. Из второго уравнения системы находим

$$x=y+z-3.$$

Подставляя это значение x в первое уравнение системы, получаем

$$y^2+z^2+9+2yz-6y-6z-y^2-z^2=1,$$

или

$$2yz-6y-6z=-8,\text{ или }y(z-3)=3z-4.$$

Отсюда

$$y=\frac{3z-4}{z-3}=\frac{3z-9+5}{z-3}=3+\frac{5}{z-3}.$$

При целом y выражение $z-3$ может равняться лишь ±1 и ±5. Таким образом, имеем

$$z_1=4,\ z_2=2,\ z_3=+8,\ z_4=-2.$$

Соответствующие значения x и y таковы:

$$x_1=9,\ x_2=-3,\ x_3=9,\ x_4=-3;$$

$$y_1=8,\ y_2=-2,\ y_3=4,\ y_4=2.$$

Итак, данная система имеет четыре решения в целых числах.

152. Так как $a+b+c=0$, то

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=0.$$

Это равенство перепишем в виде

$$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)=0. \tag{1}$$

Из условия следует, что

$$a+b=-c,\ a+c=-b,\ b+c=-a. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc = 0.$$

или

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

153. Предположим, что уравнение имеет рациональный корень $\frac{m}{n}$ $\left(\frac{m}{n}\right.$ — несократимая дробь$\left.\right)$. Тогда

$$\frac{m^3}{n^3} - p \cdot \frac{m}{n} + 1 = 0.$$

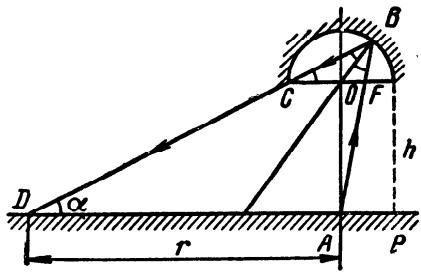

Рис. 27

Умножив обе части этого равенства на n, получим

$$\frac{m^3}{n^2} - pm + n = 0,$$

откуда

$$\frac{m^3}{n^2} = pm - n.$$

Последнее равенство не может иметь места, так как левая часть есть несократимая дробь, т. е. не может быть целым числом, а правая часть есть целое число.

154. Имеем $2^{2n+1} + 14^n + 5^n = (2 \cdot 7)^n + 2 \cdot 2^{2n} + 5^n = (2 \cdot 7)^n + 2^{2n} + 5^n + 2^{2n} = 2^n(7^n + 2^n) + (5^n + 4^n)$. Поскольку выражения $7^n + 2^n$ и $5^n + 4^n$ являются суммами одинаковых нечетных степеней, то каждое из них делится на сумму их оснований $7 + 2 = 5 + 4 = 9$. Поэтому и выражение $2^n(7^n + 2^n) + (5^n + 4^n)$ делится на 9.

155. Пусть наименьший угол между отраженными лучами и плоскостью P равен α (рис. 27). Такой угол образует луч, проходящий через край зеркала C после однократного отражения в точке B. По условию задачи $CF \parallel DA$, следовательно, $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$. Из условия отражения в точке B следует $\angle OBF = \alpha$. Поэтому в треугольнике OBF имеем

$$\angle BOF = 2\alpha, \quad \angle OFB = 180^\circ - 2\alpha - \alpha = 180^\circ - 3\alpha.$$

Обозначим расстояние от зеркала до плоскости через h, а радиус освещенного круга AD через r. Так как радиус зеркала равен 1, то

$$\frac{h}{r-1}=\operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Из треугольника OBF по теореме синусов находим

$$OF=\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

В силу подобия треугольников CBF и DBA высоты в них пропорциональны сторонам, так что

$$\frac{AD}{FC}=\frac{h+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha},$$

или

$$\frac{r}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}}=\frac{h+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}. \tag{2}$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, находим

$$r=\frac{2\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha-1}.$$

Подставив сюда данную в задаче величину $\alpha=15°$, получим

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$

поэтому из (1) получим

$$h=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

156. Первое уравнение системы перепишем в виде

$$(x+y)^2-\left(\sqrt{xy}\right)^2=84,$$
$$\left(x+y+\sqrt{xy}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)=84.$$

Отсюда в силу второго уравнения получаем

$$14\cdot\left(x+y-\sqrt{xy}\right)=84,$$

или

$$x+y-\sqrt{xy}=6.$$

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=6, \\ x+y+\sqrt{xy}=14 \end{cases}$$

Теперь легко найти $x+y$ и $\sqrt{xy}$. Дальше просто.

Отв. $x_1=2$, $y_1=8$; $x_2=8$, $y_2=2$.

157. Очевидно, что должно быть $a\geqslant 0$. После возведения в квадрат обеих частей первого уравнения системы получим

$$\sqrt{x^2-y^2}=8a-x. \qquad (1)$$

Подставляя значение $\sqrt{x^2-y^2}$ во второе уравнение системы, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}=\left(\sqrt{41}+5\right)\cdot a-x. \qquad (2)$$

Теперь возведем в квадрат обе части каждого из уравнений (1) и (2). Тогда

$$y^2=-64a^2+16ax, \qquad (3)$$

$$y^2=\left(\sqrt{41}+5\right)^2a^2-2\left(\sqrt{41}+5\right)ax. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что

$$-64a^2+16ax=\left(\sqrt{41}+5\right)^2a^2-2\left(\sqrt{41}+5\right)ax,$$

или

$$\left(130+10\sqrt{41}\right)a^2=\left(26+2\sqrt{41}\right)ax.$$

Отсюда $x=5a$. Подставляя это значение x в уравнение (3), находим $y=\pm 4a$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения x, y удовлетворяют системе уравнений.

Отв. $x_1=5a$, $y_1=4a$; $x_2=5a$, $y_2=-4a$.

158. Так как $a+b+c=0$, то и $(a+b+c)^2=0$. Перепишем это равенство в виде $a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$. Если возведем обе части последнего равенства в квадрат, то получим

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2\right),$$

или

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4\left[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc\,(a+b+c)\right].$$

Но так как $a+b+c=0$, то

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right). \qquad (1)$$

С другой стороны, имеем

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$4\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)=a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right),$$

откуда

$$2(a^4+b^4+c^4)=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

или

$$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

159. Известно, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$ (задача 152). Умножив обе части равенства на $a^2+b^2+c^2$, получим

$$a^5+b^5+c^5+a^2b^2(a+b)+a^2c^2(a+c)+b^2c^2(b+c)=$$
$$=3abc(a^2+b^2+c^2),$$

или

$$a^5+b^5+c^5-a^2b^2c-a^2bc^2-ab^2c^2=3abc(a^2+b^2+c^2).$$

Отсюда

$$a^5+b^5+c^5-abc(ab+ac+bc)=3abc(a^2+b^2+c^2). \qquad (1)$$

Так как $a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$ (из условия), то равенство (1) перепишется в виде

$$a^5+b^5+c^5+\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{2}=3abc(a^2+b^2+c^2).$$

откуда

$$2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2).$$

160. Если $x_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, то $x_0^2=5+2\sqrt{6}$, или $x_0^2-5=2\sqrt{6}$. Следовательно, $(x_0^2-5)^2=(2\sqrt{6})^2$, или $x_0^4-10x_0^2+1=0$. Таким образом, уравнение $x^4-10x^2+1=0$ имеет корень, равный $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

161. Перепишем данное уравнение в виде

$$(2x^4+x^3+5x^2)+(2x^3+x^2+5x)+(2x^2+x+5)=0,$$

или

$$x^2(2x^2+x+5)+x(2x^2+x+5)+(2x^2+x+5)=0,$$

или

$$(2x^2+x+5)(x^2+x+1)=0.$$

Поскольку уравнения $2x^2+x+5=0$ и $x^2+x+1=0$ не имеют действительных корней, то и данное уравнение не имеет таковых.

162. Имеем $N=9\cdot3^{2n}+2\cdot8^{2n}=9\cdot3^{2n}-9\cdot8^{2n}+11\cdot8^{2n}=$ $=11\cdot8^{2n}-9(8^{2n}-3^{2n})$. Так как $11\cdot8^{2n}$ делится на 11 и $8^{2n}-3^{2n}$ делится на сумму $8+3=11$, то N кратно 11.

163. Число N делится на 13 тогда и только тогда, когда $N-13$ делится на 13, т. е. когда $n^2+n+1-13=n^2+n-12=(n-3)(n+4)$. делится на 13. Так как 13 — простое число, то на 13 должно делиться либо $n-3$, либо $n+4$, т. е. или $n-3=13p$, или $n+4=13q$. Отсюда получаем $n=13p+3$ или $n=13q-4$, где q — любое натуральное число, p — любое целое неотрицательное число.

164. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 28). Обозначим площади треугольника AOB,

BOC, COD, AOD соответственно через S_1, S_2, S_3, S_4. В силу условия задачи имеем

$$(S_1+S_2)(S_3+S_4)=(S_1+S_4)(S_2+S_3).$$

После элементарных преобразований это равенство перепишется в следующем виде

$$(S_1-S_3)(S_4-S_2)=0.$$

Отсюда следует, что или $S_1=S_3$, или $S_2=S_4$, или $S_1=S_3$ и $S_2=S_4$. Если $S_1=S_3$, то $S_1+S_4=S_3+S_4$, т. е. площади треугольников ABD и ACD равны, и так как эти треугольники имеют общее основание

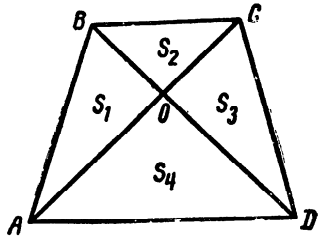

Рис. 28

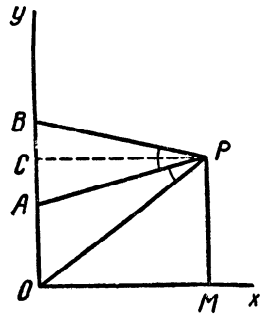

Рис. 29

AD, то должны быть у них равные высоты, т. е. вершины B и C равноудалены от прямой AD, а значит, BC и AD параллельны и четырехугольник — трапеция. Если $S_2=S_4$, то AB и CD параллельны, и, наконец, если $S_1=S_3$ и $S_2=S_4$, то четырехугольник — параллелограмм.

165. Для того чтобы PA был биссектрисой угла OPB, достаточно, чтобы

$$\frac{OA}{AB}=\frac{PO}{PB},$$

или

$$\frac{OA^2}{AB^2}=\frac{PO^2}{PB^2}. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника OMP (рис. 29) имеем

$$PO^2=OM^2+MP^2=x^2+h^2.$$

Опустим на Oy перпендикуляр PC; из прямоугольного треугольника PBC следует, что $PB^2=PC^2+CB^2$. Если OC меньше, чем OB, то $CB=a+b-h$, а если OC больше, чем OB, то $CB=h-(a+b)$. Таким образом, во всех возможных случаях

$$CB^2=(a+b-h)^2,\quad PB^2=x^2+(a+b-h)^2.$$

Тогда равенство (1) перепишется в виде

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{x^2 + h^2}{x^2 + (a + b - h)^2},$$

или

$$(a^2 - b^2)\, x^2 = b^2h^2 - a^2\,(a + b - h)^2,$$

или

$$(a^2 - b^2)\, x^2 = [bh + a\,(a + b - h)] \cdot [bh - a\,(a + b - h)],$$

или

$$(a^2 - b^2)\, x^2 = [a\,(a + b) - (a - b)\, h]\,[(a + b)\,(h - a)],$$

или, наконец, деля обе части этого равенства на $a+b$, получаем

$$(a - b)\, x^2 = (h - a)\,[a\,(a + b) - (a - b) \cdot h]. \qquad (2)$$

Заметим сразу, что если $a=b$, то уравнение (2) можно переписать так

$$0 \cdot x^2 = 2a^2 \cdot (h - a).$$

Если $h \neq a$, то оно не имеет решения, а если $h=a$, то имеется решение. Это можно было предвидеть из геометрических соображений. Действительно, если $a=b$, то точка A — середина отрезка OB, и биссектриса PA угла OPB должна быть параллельна Ox. Это возможно только в том случае, если $h=a$, и тогда точка M может быть взята произвольно на Ox. Если же $a-b \neq 0$, то из (2) находим

$$x^2 = (h - a) \cdot \left[\frac{a\,(a + b)}{a - b} - h\right],$$

откуда

$$x = \sqrt{(h - a)\left[\frac{a\,(a + b)}{a - b} - h\right]}.$$

Установим теперь условие положительности подкоренного выражения. Подкоренное выражение представляет собой произведение двух множителей, которые должны быть одинакового знака:

1) $a<b$. Так как второй множитель отрицателен, то и первый должен быть отрицательным. Отсюда имеем условие $h<a$;

2) $a>b$. Значениями h, обращающими в нуль оба множителя, являются a и $\frac{a\,(a + b)}{a - b}$. Оба они положительны, и мы имеем $a < \frac{a\,(a + b)}{a - b}$. Теперь легко видеть, что должно быть

$$a < h < \frac{a\,(a + b)}{a - b}.$$

166. Переписав первое уравнение системы в виде $\sqrt[3]{x^2+y^2} = 2\sqrt[3]{17}$ и возведя обе части в куб, получим

$$x^2 + y^2 = 136. \qquad (1)$$

Если возвести в квадрат обе части второго уравнения системы, то после преобразований получим $\sqrt{x^2-y^2}=18-x$. Отсюда

$$y^2 = 36x - 324. \qquad (2)$$

Подставляя это значение y^2 в уравнение (1), получим

$$x^2 + 36x - 460 = 0.$$

Решая это уравнение, находим $x_1=10$, $x_2=-46$. Если подставить во второе уравнение данной системы значение $x=-46$, то получится уравнение, не имеющее корня, так как неравенства

$$\begin{cases} -46+y \geqslant 0, \\ -46-y \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \geqslant 46, \\ y \leqslant -46 \end{cases}$$

противоречивы. Если подставить в уравнение (2) значение $x_1=10$, то найдем два значения y, а именно: $y_1=6$, $y_2=-6$. Проверкой убеждаемся, что пары чисел $x_1=10$, $y_1=6$ и $x_2=10$, $y_2=-6$ служат решениями данной системы уравнений.

Отв. $x_1=10$, $y_1=6$; $x_2=10$, $y_2=-6$.

167. Известно, что если $a+b+c=0$, то имеют место равенства

$$2(a^4+b^4+c^4) = (a^2+b^2+c^2)^2 \text{ (задача 158)},$$

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc \text{ (задача 152)}.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим

$$2[a^7+b^7+c^7+a^3b^3(a+b)+a^3c^3(a+c)+b^3c^3(b+c)] = 3abc(a^2+b^2+c^2)^2. \qquad (1)$$

Но поскольку $a+b=-c$, $a+c=-b$, $b+c=-a$, то равенство (1) перепишется в виде

$$2(a^7+b^7+c^7-a^3b^3c-a^3bc^3-ab^3c^3) = 3abc(a^2+b^2+c^2)^2,$$

или

$$2(a^7+b^7+c^7) - 2abc(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = 3abc(a^2+b^2+c^2)^2. \qquad (2)$$

Но так как из задачи 158 следует, что если $a+b+c=0$, то $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4}$, а поэтому равенство (2) можно переписать в виде

$$2(a^7+b^7+c^7) = \frac{7abc(a^2+b^2+c^2)^2}{2},$$

или

$$10(a^7+b^7+c^7) = \frac{7abc(a^2+b^2+c^2)^2\cdot 5}{2}. \qquad (3)$$

Но поскольку из задачи 159 следует, что $\frac{5}{2}abc = \frac{a^5+b^5+c^5}{a^2+b^2+c^2}$, то равенство (3) принимает вид

$$10(a^7+b^7+c^7) = 7(a^2+b^2+c^2)\cdot(a^5+b^5+c^5).$$

168. Перепишем данное уравнение в виде

$$(2x^4 - x^3 + x^2) + (2x^2 - x + 1) = 0,$$

или

$$x^2(2x^2 - x + 1) + (2x^2 - x + 1) = 0,$$

или

$$(x^2 + 1)(2x^2 - x + 1) = 0.$$

Так как уравнения $x^2+1=0$ и $2x^2-x+1=0$ не имеют действительных корней, то и данное уравнение не имеет таковых.

169. Имеем $3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3} = 3^n \cdot 5^{n+1} + 8 \cdot 2^n = 3^n \cdot 5^{n+1} - 5 \cdot 2^n + 13 \cdot 2^n = 5(15^n - 2^n) + 13 \cdot 2^n$.

Поскольку $15^n - 2^n$ делится на $13 = 15 - 2$, то и данное выражение делится на 13.

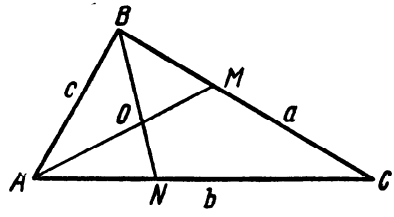

Рис. 30

170. Введем обозначения $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (рис. 30). Пусть $AO:OM=k$, $BO:ON=p$ (в рассматриваемой задаче $k=\sqrt{3}$, $p=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$). Так как AM — биссектриса угла A, то $\frac{BM}{c}=\frac{MC}{b}$, или $\frac{BM}{c}=\frac{a-BM}{b}$, откуда $BM=\frac{ac}{b+c}$. Аналогично $MC=\frac{ab}{b+c}$, $AN=\frac{bc}{a+c}$, $NC=\frac{ab}{a+c}$. В треугольнике ABM прямая BO — биссектриса, поэтому $\frac{c}{BM}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{AO}{OM}=k$, откуда

$$\frac{b+c}{a}=k, \tag{1}$$

а из треугольника ABN аналогично получаем

$$\frac{a+c}{b}=p. \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) перепишем в виде

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=k, \quad p\cdot\frac{b}{a}-\frac{c}{a}=1.$$

Сложив последние два равенства, получим $(p+1)\frac{b}{a}=k+1$, откуда $\frac{b}{a}=\frac{k+1}{p+1}$, и так как $\frac{c}{a}=k-\frac{b}{a}$, то $\frac{c}{a}=\frac{kp-1}{p+1}$. Таким образом, имеем

$$a:b:c=(p+1):(k+1):(kp-1).$$

Но поскольку $k=\sqrt{3}$, $p=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, то

$$a:b:c=\frac{\sqrt{3}+3}{2}:(\sqrt{3}+1):\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

т. е.

$$a:b:c=\sqrt{3}:2:1.$$

Из последнего следует, что $a^2+c^2=b^2$, т. е. $\angle B=90°$. Далее, так как $\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$, то $\angle C=30°$.

Отв. $\angle A=60°$, $\angle B=90°$, $\angle C=30°$.

171. Если $x\geqslant 1$, то первое уравнение имеет вид $x-1=1-x$. Отсюда $x=1$, что не противоречит неравенству $x\geqslant 1$. Если же $x<1$, то это уравнение перепишется в виде $-x+1=1-x$, которое выполняется при любом значении x. Таким образом, первое уравнение удовлетворяется всеми x из промежутка

$$x\leqslant 1. \tag{1}$$

Если $x\geqslant 0$, то второе уравнение имеет вид $x=x$, которое выполняется при любых x. Следовательно, все $x\geqslant 0$ удовлетворяют этому уравнению. Если же $x\leqslant 0$, то это уравнение можно переписать в виде $-x=x$, которое выполняется лишь при $x=0$. Таким образом, второе уравнение удовлетворяется для всех

$$x\geqslant 0. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) заключаем, что оба уравнения выполняются для всех x из промежутка $0\leqslant x\leqslant 1$.

172. Вначале заметим, что должно быть $x+y>0$, $x-y\geqslant 0$, $x+y>x-y$, т. е. $x\geqslant y>0$. После возвышения обеих частей первого уравнения системы в квадрат получим

$$\sqrt{x^2-y^2}=x-\frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

Теперь, вычитая из второго уравнения системы уравнение (1), находим

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3a^2}{2}-x. \tag{2}$$

Возведя обе части второго уравнения данной системы в квадрат, приходим к уравнению

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2-y^2}=\frac{a^4}{2}-x^2, \tag{3}$$

а перемножая почленно уравнения (1) и (2), получаем

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2-y^2}=\left(x-\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{3a^2}{2}-x\right). \tag{4}$$

В силу уравнений (3) и (4) имеем

$$\frac{a^4}{2} - x^2 = \left(x - \frac{a^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{3a^2}{2} - x\right).$$

Отсюда $x = \frac{5a^2}{8}$. Подставляя это значение x в уравнение (1), получаем

$$y_1 = a^2 \sqrt{\frac{3}{8}}; \quad y_2 = -a^2 \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

В ходе решения мы могли получить посторонние решения. Поэтому полученные значения x, y надо подвергнуть испытанию. Проверкой убеждаемся, что исходная система имеет только одно решение:

$$x = \frac{5a^2}{8}, \quad y = a^2 \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

173. Введем обозначения $\frac{a-b}{c} = x$, $\frac{b-c}{a} = y$, $\frac{c-a}{b} = z$. Тогда левая часть доказываемого равенства принимает вид

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}.$$

Имеем

$$\frac{y+z}{x} = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} =$$

$$= \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b^2 - a^2 - c(b-a)}{ab} = \frac{c}{ab}(-a-b+c) =$$

$$= \frac{c}{ab}(-a-b-c+2c) = \frac{2c^2}{ab}, \text{ так как } a+b+c=0.$$

Применяя круговую подстановку, найдем

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = \frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3).$$

Но легко доказать, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$. Поэтому

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} = 6, \text{ или } \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 3+6=9,$$

что и требовалось доказать.

174. Согласно условию имеем

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}=0.$$

Следовательно, это равенство выполняется, когда $a+b=0$, или $b+c=0$, или $c+a=0$. Поэтому

$$a^{2n+1}=-b^{2n+1},\ \text{либо}\ b^{2n+1}=-c^{2n+1},\ \text{либо}\ c^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

Пусть $a^{2n+1}=-b^{2n+1}$; тогда

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

Аналогично доказывается это равенство в остальных двух случаях.

175. Перепишем данное уравнение в виде

$$3x^2-3-4y^2=10,$$

или

$$3(x^2-1)-4y^2=10,$$

или

$$3(x-1)(x+1)-4y^2=10. \qquad (1)$$

Так как $3x^2-4y^2=13$ — нечетное число, то ясно, что x может быть только нечетным числом. Следовательно, $(x-1)\cdot(x+1)$ — произведение двух последовательных четных чисел, а потому это произведение кратно четырем. Таким образом, левая часть уравнения (1) кратна четырем. Но так как число 10 не кратно четырем, то равенство (1) не выполняется ни при каких целых x и y, т. е. данное уравнение не имеет решений в целых числах.

176. Так как $4x-8y$ при любых целых x и y четно, а правая часть уравнения нечетна, то если уравнение имеет решение в целых числах, то x^2, а следовательно, и x, нечетно. Данное уравнение можно переписать в виде

$$x^2+4x+3-8y=14,$$

или

$$(x+1)(x+3)-8y=14. \qquad (1)$$

Так как x — нечетно, то $x+1$, $x+3$ два последовательных четных числа, а потому их произведение кратно четырем, а поскольку и $8y$ кратно четырем, то левая часть уравнения кратна четырем. Но правая часть (14) не делится на четыре. Следовательно, уравнение (1) и вместе с ним и данное не выполняются ни при каких целых x и y.

177. Имеем $7^n(7^n+1)+2(9^n-21^n)=7^{2n}+7^n+2\cdot 3^{2n}-2\cdot 21^n=$
$=7^{2n}-2\cdot 7^n\cdot 3^n+3^{2n}+7^n+9^n=(7^n-3^n)^2+(7^n+9^n)$.

Выражение 7^n-3^n делится на 4 при любом целом неотрицательном n, $(7^n-3^n)^2$ делится на 16 при этих же n. Сумма 7^n+9^n делится на $7+9=16$ при любом нечетном положительном n. Следовательно, рассматриваемое выражение делится на 16 при любом положительном нечетном n.

178. Рассмотрим отдельно случаи, когда n четное и n нечетное. Пусть $n=2k$ — четное число, тогда $9^{n+1}+8n-9=9^{2k+1}+16k-9=$
$=9(9^{2k}-1)+16k=9\cdot(81^k-1)+16k$. Так как 81^k-1 делится на $81-1=80=16\cdot 5$, то оно делится и на 16. Итак, при четном n рас-

сматриваемое выражение делится на 16. Пусть теперь $n=2k+1$ — нечетное число, тогда $9^{n+1}+8n-9=9^{2k+2}+16k+8-9=(81^{k+1}-1)+16k$. Так как $81^{k+1}-1$ делится на $81-1=80=16\cdot 5$, то оно делится и на 16, а потому и рассматриваемое выражение при нечетном n делится на 16.

179. Очевидно, что биссектриса BE угла B и перпендикуляр FE к стороне AC, проведенный через ее середину, пересекается в точке E, принадлежащей окружности, описанной около треугольника ABC

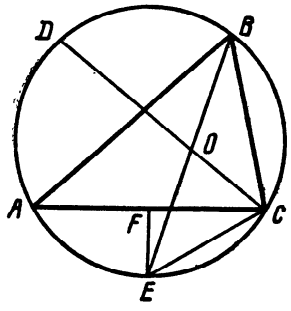

Рис. 31

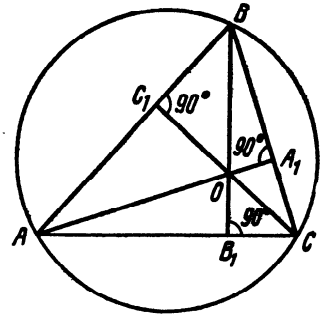

Рис. 32

(рис. 31). Поскольку FE — множество точек, равноудаленных от точек A и C, то $AE=CE$. Остается доказать, что $OE=EC$, где точка O — центр вписанного круга. Учитывая, что центр O вписанного круга есть точка пересечения биссектрис BE и CD углов треугольника и угол COE измеряется полусуммой дуг DB и CE имеем

$$\angle COE=\frac{1}{2}(2\angle BCD+2\angle CBE)=\frac{1}{2}(\angle C+\angle B) \qquad (1)$$

и

$$\angle OCE=\angle DCA+\angle ACE=\frac{1}{2}\angle C+\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle C+\angle B). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) заключаем, что в треугольнике EOC $\angle C=\angle O$, а поэтому $OE=EC$.

180. Пусть R_1 и R соответственно радиусы окружностей, описанных около треугольников BOC и ABC (рис. 32). Из треугольника BOC имеем $R_1=\dfrac{BC}{2\sin\angle BOC}$, а из треугольника ABC находим $R=\dfrac{BC}{2\sin A}$. Но так как $\angle BOC=180°-A$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, то $\sin\angle BOC=\sin A$. Поэтому $R_1=R$. Рассматривая пары треугольников ABC, AOB и ABC, AOC таким же образом, убеждаемся, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AOB и AOC, также равны R.

181. Введем обозначение $\sqrt{x^2-6y+1}=z\geqslant 0$. Тогда первое уравнение системы запишется в виде $z^2-8z+16=0$, или $(z-4)^2=0$, откуда $z=4$. Таким образом, $\sqrt{x^2-6y+1}=4$, или

$$x^2-6y-15=0. \tag{1}$$

Второе уравнение системы после некоторых преобразований принимает вид

$$\frac{x^2y-5}{49}=\frac{2(x^2-6y)}{x^2y}+\frac{4}{9}. \tag{2}$$

Так как из уравнения (1) следует, что $x^2-6y=15$, то уравнение (2) перепишется так

$$\frac{x^2y-5}{49}=\frac{30}{x^2y}+\frac{4}{9}. \tag{3}$$

Если обозначить x^2y через t, то уравнение (3) приводится к уравнению

$$9t^2-241t-13\,230=0,$$

откуда

$$t_1=54,\quad t_2=-\frac{245}{9}.$$

Итак, имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-6y-15=0, \\ x^2y=54. \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} x^2-6y-15=0, \\ x^2y=-\dfrac{245}{9}. \end{cases} \tag{5}$$

Исключая x^2 из системы (4), получим уравнение $2y^2+5y-18=0$. Отсюда $y_1=2$, $y_2=-4{,}5$. Второй корень приводит к мнимому значению x. Следовательно, система (4) дает только два действительных решения $x_1=+\sqrt{27}$, $y_1=2$ и $x_2=-\sqrt{27}$, $y_2=2$.

Система (5) не имеет действительных решений. Таким образом, исходная система имеет ровно два действительных решения.

182. Первое решение. Вычтем почленно второе из заданных в условии равенств из первого, получим

$$a^3-b^3+p(a-b)=0.$$

Так как $a\neq b$, то, поделив обе части этого равенства на $(a-b)$, получим $a^2+ab+b^2+p=0$.

Таким же образом, вычитая почленно третье равенство из первого, получаем

$$a^2+ac+c^2+p=0.$$

И, наконец, вычитая почленно одно из другого последние два равенства, имеем

$$a(b-c)+b^2-c^2=0,$$

или, сокращая на $b-c$ не равное нулю, получаем

$$a+b+c=0.$$

Второе решение. Из заданных трех равенств усматриваем, что многочлен x^3+px+q обращается в нуль при $x=a$, при $x=b$ и при $x=c$. Следовательно, этот многочлен делится на произведение $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Итак, имеем тождество

$$x^3+px+q=(x-a)(x-b)(x-c),$$

так как коэффициент при x^3 равен единице. Значит,

$$x^3+px+q=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ac+ab)x-abc.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получаем соответственно

$$a+b+c=0,\quad ab+ac+bc=p \text{ и } abc=-q.$$

183. Пусть числа α, β, γ — корни данного уравнения. Тогда в силу теоремы Виета (для кубического уравнения) имеем

$$\alpha+\beta+\gamma=-p,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=q.$$

Рассмотрим разность p^2-3q. Имеем

$$p^2-3q=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=$$
$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma.$$

Так как по условию задачи $p^2-3q<0$, то

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma<0,$$

или

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma<0,$$
$$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+$$
$$+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)<0,$$
$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\gamma)^2<0.$$

Если бы все три числа α, β, γ были бы действительными, то последнее равенство невозможно. Следовательно, хотя бы одно из чисел α, β, γ мнимое. Но так как мнимые корни уравнения сопряженные, то два корня данного уравнения мнимые и лишь один — действительный, что и требовалось доказать.

184. Имеем $N=(3^4)^{n+1}-(4^3)^{n+1}=81^{n+1}-64^{n+1}$. Но $81^{n+1}-64^{n+1}$ делится на разность $81-64=17$, т. е. число N кратно 17.

185. Пусть MK, KL, ML — средние линии треугольника (рис. 33). Очевидно, что середины P, R, S отрезков AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат отрезкам ML, MK, KL. Поэтому PRS — невырожденный треугольник. Следовательно, точки P, R, S не принадлежат одной прямой.

186. Первое уравнение системы перепишем в виде $\frac{x^2-12y+1+16}{12}-\frac{2\sqrt{x^2-12y+1}}{3}=0$. Для удобства введем обозначение $\sqrt{x^2-12y+1}=z$. Тогда первое уравнение системы принимает вид $z^2-8z+16=0$, или $(z-4)^2=0$, откуда $z=4$. Таким образом, имеем

$$x^2-12y=15. \tag{1}$$

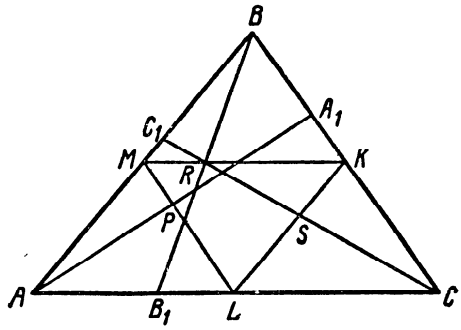

Рис. 33

Так как $y\neq 0$ (в противном случае второе уравнение системы потеряло бы смысл), то умножив обе части второго уравнения на $\frac{2x}{y}$ и произведя некоторые преобразования, получим

$$\left(\frac{x}{2y}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2y}\cdot\sqrt{1+\frac{4x}{3y}}+\left(1+\frac{4x}{3y}\right)=0,$$

или

$$\left(\frac{x}{2y}-\sqrt{1+\frac{4x}{3y}}\right)^2=0,$$

т. е.

$$\frac{x}{2y}=\sqrt{1+\frac{4x}{3y}}. \tag{2}$$

После возведения в квадрат обеих частей последнего уравнения получим

$$3\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2-16\cdot\frac{x}{y}-12=0,$$

откуда $\left(\frac{x}{y}\right)_1=6$, $\left(\frac{x}{y}\right)_2=-\frac{2}{3}$. Очевидно, что второе значение не

удовлетворяет уравнению (2). Поэтому имеем только $\frac{x}{y}=6$. Итак, мы пришли к системе уравнений

$$\begin{cases} x=6y, \\ x^2-12y=15. \end{cases}$$

Решениями этой системы служат пары чисел $x_1=5$, $y_1=\frac{5}{6}$ и $x_2=-3$, $y_2=-\frac{1}{2}$. Проверкой убеждаемся, что эти пары чисел служат и решениями исходной системы.

187. Из второго уравнения системы имеем

$$x^2+y^2=\frac{1}{5}-4xy. \tag{1}$$

Возведя обе части первого уравнения системы в квадрат и учитывая уравнение (1), получим

$$\sqrt{256x^2y^2+64xy-\frac{11}{5}}=36xy-1.$$

Пусть $xy=t$. Тогда

$$\sqrt{256t^2+64t-\frac{11}{5}}=36t-1.$$

После возведения обеих частей последнего уравнения в квадрат приходим к уравнению

$$650t^2-85t+2=0.$$

Отсюда $t_1=\frac{1}{10}$, $t_2=\frac{2}{65}$, т. е. $(xy)_1=\frac{1}{10}$, $(xy)_2=\frac{2}{65}$. Таким образом, имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+4xy=\frac{1}{5}, \\ xy=\frac{1}{10}. \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\begin{cases} x^2+y^2+4xy=\frac{1}{5}, \\ xy=\frac{2}{65}. \end{cases} \tag{3}$$

Из системы (2) имеем

$$(x+y)^2=\frac{1}{5}-2xy=\frac{1}{5}-2\cdot\frac{1}{10}=0,$$

откуда $x+y=0$.

Следовательно, система (2) имеет два решения

$$x_1=\frac{i}{\sqrt{10}},\ y_1=-\frac{i}{\sqrt{10}};\quad x_2=-\frac{i}{\sqrt{10}},\ y_2=\frac{i}{\sqrt{10}}.$$

Из системы (3) получаем также две системы

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{\sqrt{65}}, \\ xy=\dfrac{2}{65}. \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{3}{\sqrt{65}}, \\ xy=\dfrac{2}{65} \end{cases} \tag{5}$$

Система (4) дает два решения

$$x_3=\frac{2}{\sqrt{65}},\quad y_3=\frac{1}{\sqrt{65}};\quad x_4=\frac{1}{\sqrt{65}};\quad y_4=\frac{2}{\sqrt{65}}.$$

Система (5) имеет также два решения

$$x_5=-\frac{2}{\sqrt{65}},\quad y_5=-\frac{1}{\sqrt{65}};\quad x_6=-\frac{1}{\sqrt{65}},\quad y_6=-\frac{2}{\sqrt{65}}.$$

В ходе решения мы могли получить посторонние решения, а потому полученные пары значений x, y надо подвергнуть испытанию.

Проверкой убеждаемся, что лишь четыре пары чисел x, y удовлетворяют системе, а именно (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_6, y_6).

188. Легко убедиться, что

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=\left(\frac{1}{b-c}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right),$$

для этого достаточно показать, что сумма

$$\frac{1}{b-c}\left(\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)+\frac{1}{c-a}\left(\frac{a}{b-c}+\frac{c}{a-b}\right)+$$
$$+\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=0,$$

или

$$\frac{b(a-b)+c(c-a)+a(a-b)+c(b-c)+a(c-a)+b(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0,$$

что очевидно. Следовательно, $B=A\cdot C$, где $C=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$

Так что, если $A=0$, то и $B=0$. Для того чтобы было верное обратное утверждение, т. е. для того, чтобы равенство B повлекло за собой равенство A, необходимо, чтобы $C\neq 0$. Легко представить C в виде

$$C=-\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2(b-c)(c-a)(a-b)},$$

а так как a, b и c различны, то $C\neq 0$. Следовательно, обратное утверждение также верно.

189. Умножим первое из данных равенств на a, а второе на $-b$.

$$a^2x+acy+abz=0,$$

$$-bcx-b^2y-abz=0.$$

Сложив полученные равенства, находим $(a^2-bc)x-(b^2-ac)y=0$, откуда

$$\frac{x}{b^2-ac}=\frac{y}{a^2-bc}. \qquad (1)$$

Теперь умножим первое равенство на c, а второе на $-a$.

$$acx+c^2y+bcz=0,$$

$$-acx-aby-a^2z=0.$$

Сложив эти два равенства, получим $(c^2-ab)y-(a^2-bc)z=0$, откуда

$$\frac{y}{a^2-bc}=\frac{z}{c^2-ab}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует

$$\frac{x}{b^2-ac}=\frac{y}{a^2-bc}=\frac{z}{c^2-ab}.$$

Обозначим каждое из этих отношений через p, тогда

$$x=p(b^2-ac),\quad y=p(a^2-bc),\quad z=p(c^2-ab).$$

Подставив эти значения x, y, z в третье равенство и сократив на p получим

$$b(b^2-ac)+a(a^2-bc)+c(c^2-ab)=0, \text{ или}$$

$$a^3+b^3+c^2-3abc=0.$$

190. Решая данное уравнение, находим $x_1=\frac{1}{a-1}$, $x_2=\frac{1}{a+1}$.

Пусть

$$0<\frac{1}{a-1}<1,\quad 0<\frac{1}{a+1}<1. \qquad (1)$$

Оба эти неравенства выполняются одновременно лишь при $a>2$. Таким образом, мы доказали необходимость условия задачи. Достаточность условия вытекает из того, что если $a\geq 2$, то выполняются оба неравенства (1).

191. Если мы докажем, что x не может быть ни четным, ни нечетным, то этим мы докажем утверждение задачи. Если x — четное число, то x^{10} и px^9 — четные. Следовательно, левая часть уравнения есть сумма четного и нечетного чисел, а потому не может быть равна нулю. Если же x — нечетное число, то x^{10} — нечетное, и px^9 — нечетное, как произведение нечетных чисел. Следовательно, левая часть есть сумма трех нечетных чисел, а потому не может быть равна нулю.

192. Имеем $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}=5^{2n}\cdot 2^n\cdot 5\cdot 4+3^n\cdot 2^{2n}\times$ $\times 9\cdot 2=20\cdot 50^n+18\cdot 12^n=19\cdot 50^n+19\cdot 12^n+(50^n-12^n)$.

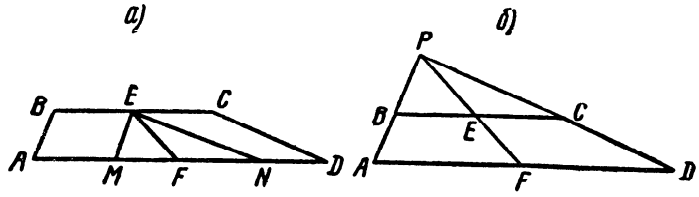

Рис. 34

Так как разность одинаковых степеней делится на разность оснований, то 50^n-12^n делится на $50-12=38$, а поэтому и на 19. Следовательно, рассматриваемое число делится на 19.

193. Имеем $7^{n+2}+27^{2n+1}=7^{n+2}+7^n\cdot 8+8^{2n+1}-7^n\cdot 8+27^{2n+1}-$ $-8^{2n+1}=7^n(7^2+8)+8(64^n-7^n)+27^{2n+1}-8^{2n+1}=57\cdot 7^n+8\cdot(64^n-$ $-7^n)+(27^{2n+1}-8^{2n+1})$.

Так как число $57=3\cdot 19$, разность 64^n-7^n делится на $64-7=$ $=57$, и $27^{2n+1}-8^{2n+1}$ кратно $27-8=19$, то рассматриваемое выражение делится на 19 при любом целом неотрицательном n.

194. Первое решение. Пусть точки E и F соответственно середины оснований BC и AD трапеции. Проведем EM и EN параллельно соответственно AB и CD (рис. 34, *а*). Так как $\angle EMF+$ $+\angle ENF=\angle A+\angle D=90°$, то треугольник MEN — прямоугольный. Далее, поскольку $AM=BE=EC=DN$, то EF медиана в треугольнике MEN. Следовательно, $MF=EF=FN$. Но $MN=AD-AM-$ $-DN=AD-BE-EC=AD-BC$. Отсюда $EF=\dfrac{1}{2}(AD-BC)$.

Второе решение. Продолжим боковые стороны AB и CD до пересечения в точке P и соединим P с серединой F основания AD (рис. 34, *б*). Ясно, что BC пересекается с PF в точке E, делящей BC пополам. Так как $\angle A+\angle D=90°$, то $\angle APD=90°$. Поскольку медиана, проведенная из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы, то $PE=\dfrac{BC}{2}$, $PF=\dfrac{AD}{2}$. Следовательно, $EF=PF-PE=\dfrac{1}{2}(AD-BC)$.

195. Пусть четырехугольник $ABCD$ (рис. 35) обладает свойством, указанным в условии задачи. Обозначим буквами K, M, N, E, F середины отрезков AC, AB, CD, AD, BC. Отрезок MK — средняя

линия треугольника ABC, а отрезок NK — средняя линия треугольника ACD. Поэтому $MK=\frac{1}{2}BC$, $NK=\frac{1}{2}AD$. Следовательно, $MN\leqslant MK+NK=\frac{1}{2}(BC+AD)$. Рассуждая таким же образом, найдем $EF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)$. Складывая полученные неравенства, получим

$$MN+EF\leqslant\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD).$$

Но так как по условию $MN+EF=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$, то $MN=\frac{BC+AD}{2}$ и $EF=\frac{AB+CD}{2}$. Следовательно, MN параллельно BC и AD, а EF параллельно AB и CD. В силу последнего заключения ясно, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

196. Положим, что α есть общий корень данных уравнений. Тогда имеем

$$2\alpha^2-(3k+2)\alpha+12=0 \text{ и } 4\alpha^2-(9k-2)\alpha+36=0.$$

или

$$\alpha^2=\frac{(3k+2)\alpha-12}{2} \text{ и } \alpha^2=\frac{(9k-2)\alpha-36}{4}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$(3k+2)\alpha-12=\frac{(9k-2)\alpha-36}{2}.$$

Отсюда $\alpha=\frac{4}{k-2}$. Подставляя это значение α, например, в равенство $2\alpha^2-(3k+2)\alpha+12=0$, получим

$$\frac{8}{(k-2)^2}-\frac{3k+2}{k-2}+3=0.$$

Это равенство выполняется лишь при $k=3$. Итак, данные уравнения имеют общий корень при $k=3$.

197. Данное равенство перепишем в виде

$$a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab=0.$$

Умножив обе части этого равенства на 2, получим

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ac-2bc-2ab=0,$$

или

$$(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)=0,$$

или

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

Поскольку a, b, c — действительные числа и так как квадрат действительного числа неотрицателен, то из последнего равенства следует,

что $a=b=c$ в силу того, что сумма неотрицательных чисел равна нулю лишь тогда, когда каждое слагаемое равно нулю.

198. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим

$$x+a+b-x+2\sqrt{(x+a)(b-x)}=c^2,$$

или

$$a+b+2\sqrt{(x+a)(b-x)}=c^2. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что

$$c^2 \geqslant a+b. \qquad (2)$$

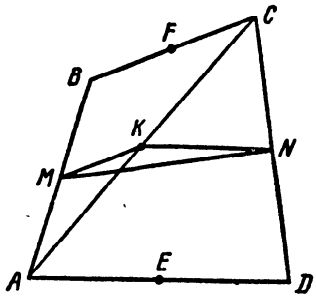

Рис. 35

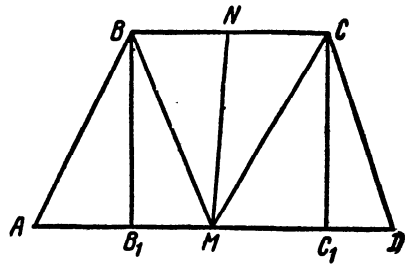

Рис. 36

Равенство (1) перепишем в виде

$$4(x+a)(b-x)=(c^2-a-b)^2,$$

или

$$4x^2-4(b-a)x+(c^2-a-b)^2-4ab=0. \qquad (3)$$

Дискриминант этого уравнения

$$D=4(b-a)^2-4(c^2-a-b)^2+16ab=4(b+a)^2-$$
$$-4[c^4-2c^2(b+a)+(b+a)^2]=4c^2[2(b+a)-c^2].$$

1) Если $D=0$, то уравнение (3) имеет только корень

$$x=\frac{b-a}{2}.$$

а) При этом, если $c=0$, то из условия следует, что $a=-b$, $x=b$, $x=0$.

б) Если же $2(b+a)-c^2=0$, то $c=\sqrt{2(b+a)}$, и подстановкой в данное уравнение значения $x=\frac{b-a}{2}$ убеждаемся, что число $\frac{b-a}{2}$ — корень данного уравнения.

Соотношение $c^2=2(a+b)$ имеет место в обоих случаях (а) и (б).

2) Если $D<0$, что имеет место при $c\neq 0$ и $c^2>2(b+a)$, то уравнение (3) не имеет действительных корней.

3) Если $D>0$, то уравнение (3) имеет два различных действительных корня

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left[b-a\pm c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right],$$

так как

$$c^2<2(b+a).$$

Подставим в левую часть данного уравнения

$$x_1=\frac{1}{2}\left[b-a+c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]$$

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[b+a+c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]}+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left[b+a-c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(2b+2a-c^2)+2c\sqrt{2b+2a-c^2}}+c^2+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(2b+2a-c^2)-2c\sqrt{2b+2a-c^2}}+c^2=\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\sqrt{2b+2a-c^2}+c\right|+\left|\sqrt{2b+2a-c^2}-c\right|\right)=c,$$

так как из соотношения (2) следует, что $c\geqslant\sqrt{2b+2a-c^2}$. Таким образом, $x_1=\frac{1}{2}[b-a+c\sqrt{2(b+c)}-c^2]$ — корень данного уравнения.

Аналогично убеждаемся, что $x_2=\frac{1}{2}[b-a-c\sqrt{2(b+a)-c^2}]$ — второй корень данного уравнения.

Итак, если $c^2=2(a+b)$, то уравнение $\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}=c$ имеет единственный действительный корень.

Если же $c^2\neq 2(a+b)$, то рассматриваемое уравнение не имеет действительных корней [при $c^2>2(a+b)$] или имеет два различных действительных корня [при $c^2>2(a+b)$].

199. Имеем $N=2^{4n+1}+2\cdot 7^n+5^{n+1}\cdot 6^n-5\cdot 7^n=2\cdot(16^n+7^n)+5\cdot(30^n-7^n)$.

Так как при нечетных числах n выражения 16^n+7^n и 30^n-7^n делятся на 23, то и N делится на 23.

200. Пусть точки M и N соответственно середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ (рис. 36). Поскольку $BN=NC$, то треугольники MBN и MCN равновелики, и так как по условию четырехугольники $ABNM$ и $MNCD$ также равновелики, то треугольники ABM

и MCD равновелики. Следовательно, высоты BB_1 и CC_1 треугольников ABM и MCD равны, так как $AM=MD$. Таким образом, точки B и C принадлежат прямой, параллельной AD, а потому четырехугольник $ABCD$ либо параллелограмм, либо трапеция.

201. Пусть α — общий корень данных уравнений. Тогда

$$\alpha^2 - a\alpha + 1 = 0,\ \alpha^2 - \alpha + a = 0.$$

Составим разность этих равенств

$$(\alpha^2 - a\alpha + 1) - (\alpha^2 - \alpha + a) = 0,$$

или

$$(1 - a)(1 + \alpha) = 0.$$

Последнее равенство выполняется или при $a=1$ или при $\alpha=-1$. Подставив в любое из данных уравнений вместо x число -1, получим $a=-2$. Итак, данные уравнения имеют хотя бы один общий корень, когда $a=1$ или когда $a=-2$. Легко заметить, что при $a=1$ общими являются оба корня, а при $a=-2$ — лишь один корень общий.

202. Пусть данные уравнения совместны, т. е. существует такое $x=\alpha$, которое удовлетворяет как первому уравнению, так и второму. Поскольку каждое из данных уравнений имеет только одно решение, то $\alpha=-\frac{b_1}{a_1}$ и $\alpha=-\frac{b_2}{a_2}$. Следовательно,

$$-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2},\ \text{или}\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

Таким образом, необходимость доказана.

Пусть условие $a_1b_2-a_2b_1=0$ выполнено. Так как $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, то это условие можно переписать в виде $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$, или $-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$. Но $-\frac{b_1}{a_1}$ и $-\frac{b_2}{a_2}$ являются решениями соответственно первого и второго уравнений, в чем можно убедиться подстановкой этих значений в уравнения. Следовательно, если выполнено условие $a_1b_2-a_2b_1=0$, то данные уравнения имеют общее решение, т. е. мы показали и достаточность условия.

203. Имеем $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$.

Возведя обе части этого равенства в куб, получаем

$$a + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b = -c,$$

откуда

$$a + b + c = -3\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right) = 3\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{c} = 3\sqrt[3]{abc},$$

или

$$(a + b + c)^3 = \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^3 = 27abc,$$

что и требовалось доказать.

204. Имеем $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}$.

Но так как по условию $ax^3=by^3=cz^3$, то

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{ax^3}{y}+\frac{ax^3}{z}}=$$

$$=x\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

Поскольку $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, то

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=x\sqrt[3]{a}. \qquad (1)$$

Аналогично находим

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=y\sqrt[3]{b} \qquad (2)$$

и

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=z\sqrt[3]{c}. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2), (3) получаем

$$\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{x}=\sqrt[3]{a},$$

$$\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{y}=\sqrt[3]{b},$$

$$\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{z}=\sqrt[3]{c}.$$

Сложив последние три равенства, получим

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, получаем

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c},$$

что и требовалось доказать.

Впрочем, эту задачу можно решить и иначе. Пусть

$$ax^3=by^3=cz^3=k^3.$$

Тогда

$$a=\frac{k^3}{x^3},\ b=\frac{k^3}{y^3},\ c=\frac{k^3}{z^3}.$$

Поэтому

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{k^3}{x}+\frac{k^3}{y}+\frac{k^3}{z}}=k=$$

$$=k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

205. То, что $\frac{a+1}{a}$ является общим корнем данных уравнений, легко проверить обычной подстановкой в каждое из них. Остается доказать, что других общих корней нет. Пусть x_0 — общий корень уравнений при некотором $a\neq 0$. Тогда имеем два равенства

$$ax_0^3-x_0^2-x_0-(a+1)=0 \qquad (1)$$

и

$$ax_0^2-x_0-(a+1)=0. \qquad (2)$$

Умножим обе части равенства (2) на x_0

$$ax_0^3-x_0^2-(a+1)x_0=0 \qquad (3)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (3), получим $ax_0-a-1=0$, откуда $x_0=\frac{a+1}{a}$.

Поскольку при решении системы мы не могли потерять корни, то единственным общим корнем уравнений является $x_0=\frac{a+1}{a}$.

206. Надо доказать, что дискриминант уравнения отрицателен. В самом деле, дискриминант $D=(b^2+a^2-c^2)^2-4a^2b^2=(b^2+a^2-c^2-2ab)(b^2+a^2-c^2+2ab)=[(a-b)^2-c^2]\cdot[(a+b)^2-c^2]$. Поскольку по условию $a+b>c$ и $|a-b|<c$, то $(a+b)^2-c^2>0$ и $(a-b)^2-c^2<0$, а поэтому $D<0$. Следовательно, уравнение не имеет действительных корней.

207. Имеем $5^{2n+1}+2^{n+1}+25^{n+4}=5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}+25^{n+4}-2^{n+4}=5\cdot 5^{2n}+2^{n+1}(2^3+1)+25^{n+4}-2^{n+4}=5\cdot 5^{2n}+18\cdot 2^n+25^{n+4}-2^{n+4}=5\cdot 5^{2n}-5\cdot 2^n+23\cdot 2^n+25^{n+4}-2^{n+4}=5\cdot(25^n-2^n)+23\cdot 2^n+25^{n+4}-2^{n+4}$. Так как 25^n-2^n и $25^{n+4}-2^{n+4}$ делятся на $23=25-2$, то данное выражение делится на 23.

208. Имеем $3^{6n}+7^n\cdot(7^n-2^{n+1})=27^{2n}+7^{2n}-7^n\cdot 2^{n+1}=27^{2n}-2^{3n}+7^{2n}-2\cdot 7^n\cdot 2^n+2^{2n}=27^{2n}-2^{2n}+(7^n-2^n)^2$. Разность $27^{2n}-2^{2n}$ делится на 25, так как $27-2=25$, разность 7^n-2^n делится на 5, поскольку $7-2=5$, а поэтому $(7^n-2^n)^2$ делится на 25. Следовательно, выражение $(27^{2n}-2^{2n})+(7^n-2^n)^2$ делится на 25, как сумма чисел, каждое из которых делится на 25.

209. Если AH и A_1H_1 — высоты прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 37), то удвоенные площади этих треугольников

соответственно равны $BC \cdot AH$ и $B_1C_1 \cdot A_1H_1$. Согласно условию, имеем $\frac{BC \cdot AH}{B_1C_1 \cdot A_1H_1} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}$. Отсюда

$$\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (1)$$

Далее, известно, что медиана, проведенная из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы. В нашей задаче $AM = \frac{1}{2}BC$ и $A_1M_1 = \frac{1}{2}B_1C_1$. Поделив почленно последние два равенства, получим

$$\frac{AM}{A_1M_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (2)$$

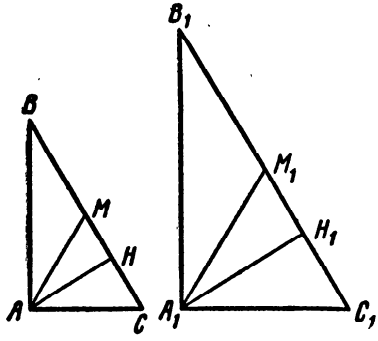

Рис. 37

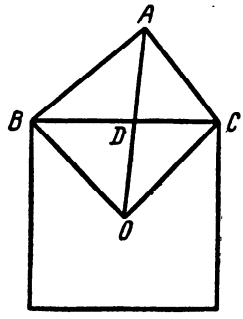

Рис. 38

Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{AM}{A_1M_1}$. Следовательно, прямоугольные треугольники AMH и $A_1M_1H_1$ подобны, а потому $\angle HMA = \angle H_1M_1A_1$. Наконец, учитывая, что треугольники AMC и $A_1M_1C_1$ равнобедренные и что углы при их вершинах равны, заключаем, что равны и их углы при основаниях, т. е. $\angle C = \angle C_1$. Итак, прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

210. Так как точка O — центр квадрата (рис. 38), то OB и OC — биссектрисы углов B и C квадрата, а потому $\angle BOC$ — прямой. Следовательно, около четырехугольника $ABOC$ можно описать окружность. Поскольку OB и OC равные хорды этой окружности, то OA — биссектриса угла BAC. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника (BAC) имеем $AB : BD = AC : DC$. Отсюда $AB \cdot DC = AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

211. Подстановкой в каждое из уравнений системы убеждаемся, что $x = y = z = t = 0$ действительно есть решение системы. Остается доказать, что больше решений в целых числах данная система

не имеет. Предположим, что целые числа $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $t=t_0$ есть ненулевое решение системы. Тогда

$$x_0z_0 = 2y_0t_0, \tag{1}$$

и

$$x_0^2 - 2y_0^2 = 6t_0^2 - 3z_0^2. \tag{2}$$

Умножим обе части равенства (2) на x_0^2 и, перенеся правую часть в левую сторону, получим

$$x_0^4 - 2x_0^2y_0^2 + 3x_0^2z_0^2 - 6x_0^2t_0^2 = 0,$$

или

$$x_0^4 - 2x_0^2y_0^2 + 3\left(x_0^2z_0^2 - 2x_0^2t_0^2\right) = 0. \tag{3}$$

Так как из равенства (1) следует, что $x_0^2z_0^2 = 4y_0^2t_0^2$, то равенство (3) можно переписать в виде

$$x_0^4 - 2x_0^2y_0^2 + 3\left(4y_0^2t_0^2 - 2x_0^2t_0^2\right) = 0,$$

или

$$x_0^2\left(x_0^2 - 2y_0^2\right) - 6t_0^2\left(x_0^2 - 2y_0^2\right) = 0, \tag{4}$$

или

$$\left(x_0^2 - 6t_0^2\right)\left(x_0^2 - 2y_0^2\right) = 0.$$

Но $x_0^2 - 6t_0^2 \neq 0$ ни при каких целых, отличных от нуля, x_0, t_0, поскольку если бы $x_0^2 - 6t_0^2 = 0$, то $x_0 = \pm t_0\sqrt{6}$. Так же $x_0^2 - 2y_0^2 \neq 0$ ни при каких целых, отличных от нуля, x_0, y_0, так как в противном случае $x_0 = \pm y_0\sqrt{2}$. Таким образом, равенство (4) не имеет место ни при каких целых, отличных от нуля, значений x_0, y_0, t_0. Итак, данная система имеет единственное решение в целых числах $x=y=z=t=0$.

212. Умножив обе части данного уравнения на $\sqrt[3]{2}$, получим

$$2c + a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = 0.$$

Теперь будем рассматривать это уравнение вместе с данным как систему уравнений относительно $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{4}$. Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} ab + b^2\sqrt[3]{2} + bc\sqrt[3]{4} = 0, \\ 2c^2 + ac\sqrt[3]{2} + bc\sqrt[3]{4} = 0. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения системы второе, получим

$$ab - 2c^2 + (b^2 - ac)\sqrt[3]{2} = 0.$$

Левая часть этого равенства есть сумма рационального числа $ab-2c^2$ и иррационального числа $(b^2-ac)\sqrt[3]{2}$. Это возможно лишь, когда

$$ab-2c^2=b^2-ac=0,$$

откуда

$$ab=2c^2 \text{ и } ac=b^2. \tag{1}$$

Умножим исходное равенство на a.

$$a^2+ab\sqrt[3]{2}+ac\sqrt[3]{4}=0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$a^2+2c^2\sqrt[3]{2}+b^2\sqrt[3]{4}=0.$$

Левая часть последнего равенства есть сумма трех неотрицательных чисел. Эта сумма может быть равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Следовательно, $a=b=c=0$, что и требовалось доказать.

213. Поскольку $(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$, то возведя обе части данного уравнения в куб, получим

$$2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot x\sqrt[3]{2}=2x^3,$$

которое после преобразований приводится к уравнению

$$x\sqrt[3]{x^2-1}\cdot\left[3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right]=0.$$

Очевидно, что $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$ могут являться корнями исходного уравнения. Теперь решим уравнение

$$2\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=3\sqrt[3]{2};$$

получаем последовательно

$$4(x^2-1)^2=27;\ (x^2-1)^2=\frac{27}{4};\ x^2=1\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Так как мы ищем только действительные корни, то имеем лишь $x^2=1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $x_4=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$, $x_5=-\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

Эти два значения x могут служить корнями исходного уравнения. Поскольку при решении уравнения мы возводили обе его части в куб, то могли появиться лишние корни, поэтому надо испытать полученные значения x. Подстановкой в данные уравнения значения x_1, x_2, x_3 мы легко устанавливаем, что они являются его корнями. Однако подстановка значений x_4 и x_5 приводит к весьма сложным преобразованиям. Поэтому мы поступим так. Положим $\sqrt[3]{x_4-1}=a$, $\sqrt[3]{x_4+1}=b$ и $x_4\sqrt[3]{2}=c$. Таким образом, нам надо доказать или

опровергнуть, что $a+b=c$. Так как x_4 удовлетворяет уравнению (1), то мы имеем

$$a^3 + 3abc + b^3 = c^3. \qquad (2)$$

Таким образом, нам надо доказать, что из равенства (2) следует равенство $a+b=c$. Заметим, что если в равенство (2) вместо c подставить $a+b$, то получится тождество. Следовательно, по теореме Безу, рассматриваемый относительно c многочлен $c^3-3abc-a^3-b^3$ делится на двучлен $c-(a+b)$. Проведя деление, получим

$$c^3 - 3abc - a^3 - b^3 = [c - (a + b)][c^2 + c(a + b) + a^2 - ab + b^2]. \qquad (3)$$

В силу равенства (2), левая часть равенства (3) равна нулю. Однако легко видеть, что $a>0$, $b>0$, $c>0$ и, значит, выражение во вторых квадратных скобках положительно. Поэтому $c-(a+b)=0$, т. е. $a+b=c$. Итак, мы убедились, что x_4 является корнем данного уравнения. Таким же образом устанавливается, что x_5 также является корнем исходного уравнения.

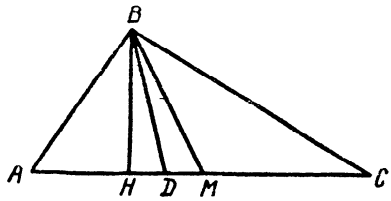

Рис. 39

214. Имеем $N=245\cdot 49^n - 245\cdot 8^n + 246\cdot 8^n = 245\cdot(49^n - 8^n) + 41\cdot 6\cdot 8^n$. Поскольку 49^n-8^n делится на $49-8=41$, то и число N делится на 41, что и требовалось доказать.

215. Пусть в треугольнике ABC (рис. 39) точки H, D и M — основания высоты, биссектрисы и медианы. Для определенности пусть $AB<BC$, тогда $\angle A>\angle C$, а следовательно, $\angle ABH<\angle HBC$. Отсюда следует, что

$$\angle ABH < \frac{\angle ABC}{2}, \text{ или } \angle ABH < \angle ABD.$$

Теперь ясно, что точка H находится между точками A и D. На основании свойства биссектрисы угла в треугольнике имеем

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Поскольку $AB<BC$, то $AD<DC$. Далее, так как $DC>\frac{AC}{2}$, заключаем, что $AD<\frac{AC}{2}$, или $AD<AM$, а следовательно, точка M лежит между точками C и D.

Итак, мы доказали, что точка D находится между точками H и M.

Если треугольник равнобедренный ($AB=BC$), то биссектриса, медиана и высота сливаются.

216. Данную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x + y = a - z, & (1) \\ x^2 + y^2 = b^2 - z^2, & (2) \\ 2xy = 2z^2. & (3) \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения (2) и (3), находим

$$(x+y)^2 = b^2 + z^2,$$

а возведя в квадрат обе части уравнения (1), получаем

$$(x+y)^2 = (a-z)^2.$$

Из последних двух уравнений следует, что

$$b^2 + z^2 = (a-z)^2,$$

откуда находим

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}. \tag{4}$$

Подставляя это значение z в уравнения (1) и (3), получаем

$$x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a}, \tag{5}$$

$$xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}. \tag{6}$$

Решая совместно уравнения (5) и (6), находим

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}, \tag{7}$$

$$y_{1,2} = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}. \tag{8}$$

Формулы (4), (7), 8) дают нам две тройки значений x, y, z, которые являются решениями данной системы, в чем можно убедиться подстановкой в каждое из уравнений системы.

Для того чтобы решения были положительны, необходимо, чтобы $x+y>0$, т. е. $\frac{a^2 + b^2}{2ab} > 0$, откуда $a>0$. Для того чтобы решения были различны и действительны, необходимо, чтобы имело место строгое неравенство

$$10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 > 0. \tag{9}$$

Ясно, что $b \neq 0$, так как в противном случае было бы $x=y=z=0$. Следовательно, $b^4 \neq 0$. Поделив обе части неравенства (9) на $-b^4$, получим

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2 - 10\frac{a^2}{b^2} + 3 < 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{3} < \frac{a^2}{b^2} < 3, \text{ а поэтому}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{a}{|b|} < \sqrt{3}. \tag{10}$$

Для того чтобы z было положительным, необходимо, чтобы $a^2>b^2$ (вспомним, что $a>0$). Отсюда

$$a>|b| \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) следует, что

$$|b|<a<|b|\sqrt{3}. \tag{12}$$

Итак, мы доказали, что условие (12) является необходимым для того, чтобы решения системы были положительными и различными. Из неравенства (10) следует, что $x>0$, $y>0$, а из неравенства (11) вытекает, что $z>0$. Таким образом, соотношение (12) является и достаточным условием, чтобы решения были положительными и различными.

217. Из второго уравнения системы имеем $y=x+b$. Подставив это значение y в первое уравнение системы и произведя простые преобразования, получим уравнение

$$2ax^2+2(ab+1)x+ab^2=0, \tag{1}$$

которое в силу условия задачи имеет действительные корни при любых значениях b. Докажем, что тогда $a=0$. Предположим противное, т. е. что $a\neq 0$. Если $a\neq 0$, то дискриминант уравнения (1)

$$4(ab+1)^2-8a^2b^2\geqslant 0 \tag{2}$$

при любых b. Однако левая часть неравенства (2) имеет вид $-4a^2b^2+8ab+4$ и при достаточно больших по абсолютной величине значениях b отрицательна. Это приводит к противоречию. Следовательно, $a=0$. При $a=0$ имеем $x=0$, $y=b$.

218. Пусть $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{c}=\dfrac{D}{d}=p$, тогда $A=ap$, $B=bp$, $C=cp$, $D=dp$.

Таким образом, имеем

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{p}(a+b+c+d). \tag{1}$$

Далее, из условия следует, что

$$\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}=\frac{A}{a}=p. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=(a+b+c+d)\times$$

$$\times\sqrt{\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}}=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)},$$

что и требовалось доказать.

219. В силу свойства ряда равных отношений каждое из данных отношений равно

$$\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{(3b-c)+(3c-a)+(3a-b)}=\frac{x+y+z}{a+b+c}. \tag{1}$$

Далее, в данном равенстве трех отношений каждое из отношений равно отношению разности между суммой двух предыдущих и третьим из них к разности между суммой двух последующих и третьим из них, а потому

$$\frac{z}{2b+c-2a}=\frac{x}{2c+a-2b}=\frac{y}{2a+b-2c}.$$

Умножим члены первого из этих отношений на c, второго на a и третьего на b. Теперь каждое из отношений равно

$$\frac{cz+ax+by}{c(2b+c-2a)+a(2c+a-2b)+b(2a+b-2c)}=$$

$$=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2},$$

что и требовалось доказать.

220. Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{2x-b-c}{(x-b)(x-c)}+\frac{2x-b-c}{(x-a)(x-b-c+a)}=0,$$

или

$$(2x-b-c)\left[\frac{1}{(x-b)(x-c)}+\frac{1}{(x-a)(x-b-c+a)}\right]=0.$$

Следовательно, уравнение распадается на два

$$2x-b-c=0 \text{ и } (x-a)(x-b-c+a)=-(x-b)(x-c).$$

Из первого уравнения получаем действительный корень $x=\frac{b+c}{2}$.

Второе уравнение можно представить так: $2x^2-2(b+c)x+(ab+ac+bc-a^2)=0$. Дискриминант этого уравнения

$$D=(b+c)^2-2(ab+ac+bc-a^2)=b^2+2bc+c^2-2ab-2ac-$$
$$-2bc+2a^2=(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)=$$
$$=(a-b)^2+(a-c)^2\geqslant 0.$$

Таким образом, и остальные два корня данного уравнения также действительные.

221. Если $x<0$, то данная система перепишется в виде

$$\begin{cases} y-x=2, \\ y+x=2, \end{cases}$$

откуда $y=2$, $x=0$, что противоречит условию $x<0$.

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то предложенную систему можно переписать в таком виде

$$\begin{cases} y + x = 2, \\ y + x = 2. \end{cases}$$

Следовательно, все пары чисел (x, y), удовлетворяющие одновременно соотношениям $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $y = 2 - x$, служат решениями данной системы.

Если $x > 1$, то данная система принимает вид

$$\begin{cases} y + x = 2, \\ y - x = 0. \end{cases}$$

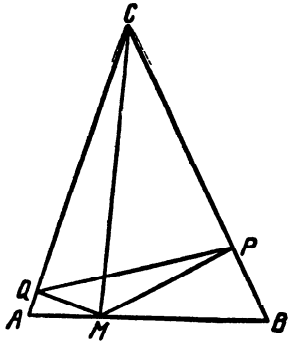

Рис. 40

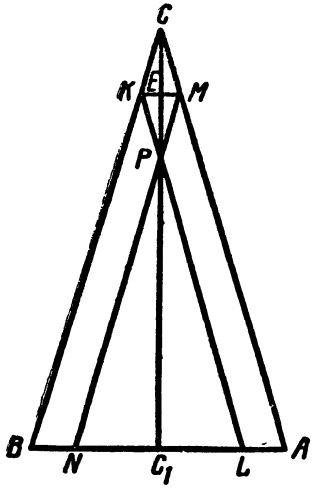

Рис. 41

Эта система имеет единственное решение $x = y = 1$. Но $x = 1$ противоречит неравенству $x > 1$, а потому в рассматриваемом случае система не имеет решений.

Отв. Все x, y, удовлетворяющие одновременно соотношениям $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 2 - x$.

222. Имеем $7^{2n+1} + 40 \cdot 2^n = 7^{2n+1} - 7 \cdot 2^n + 47 \cdot 2^n = 7(49^n - 2^n) + 47 \cdot 2^n$.

Поскольку выражение $49^n - 2^n$ делится на разность $49 - 2 = 47$ при любом целом неотрицательном n, то и $7(49^n - 2^n)$ делится на 47. При тех же значениях n произведение $47 \cdot 2^n$ делится на 47. Следовательно, и рассматриваемое выражение кратно 47 при любом целом неотрицательном n.

223. Имеем $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$. Поскольку $133 \cdot 11^n$ делится на 133 и $144^n - 11^n$ также делится на $133 = 144 - 11$, то данное число делится на 133 при любом натуральном n.

224. Из точки M стороны AB опускаем перпендикуляры MP и MQ на стороны BC и AC (рис. 40). Так как углы CPM и CQM прямые, то около четырехугольника $MPCQ$ можно описать окружность,

диаметр которой есть MC. Следовательно, $PQ=MC\cdot\sin C$. Поскольку $\sin C$ постоянная величина, то произведение $MC\cdot\sin C$ достигает минимума одновременно с MC. Но так как из всех отрезков, соединяющих вершину C с точками стороны AB, наименьшим является перпендикуляр, то утверждение задачи доказано.

225. Через точку P медианы CC_1 проводим прямые MN и KL, соответственно параллельные прямым CB и CA (рис. 41). Следовательно, полученный четырехугольник $CKPM$ — параллелограмм, диагональ MK которого делится (в точке E) медианой CC_1 пополам. Теперь ясно, что отрезки MK и AB параллельны.

Из изложенного следует, что четырехугольники $BKMN$ и $AMKL$ — параллелограммы, а потому $MA=KB$. Значит, и $CA=CB$, что и требовалось доказать.

226. То, что $x=y=z=1$ является решением системы, убеждаемся проверкой. Остается доказать, что предложенная система не имеет больше действительных решений. Так как $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, то данная система равносильна системе

$$x+y=2z^2,\quad x+z=2y^2,\quad y+z=2x^2.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим

$$y-z=2(z^2-y^2),$$

откуда или $y+z=-\frac{1}{2}$, или $y=z$.

Подставляя $y+z=-\frac{1}{2}$ в третье уравнение системы, получаем $2x^2=-\frac{1}{2}$, что невозможно ни при каком действительном x. Следовательно, остается только $y=z$. Подставляя во второе и третье уравнения системы $z=y$, получим

$$x+y=2y^2,\quad y=x^2.$$

Отсюда $2x^4-x^2-x=0$, или $x(x-1)(2x^2-2x+1)=0$. Но $x\neq 0$, если $x-1=0$, то $x=1$, $y=1$, $z=1$. Уравнение $2x^2+2x+1=0$ не имеет действительных корней. Поэтому утверждение задачи верно.

227. На основании свойства равных отношений имеем

$$\frac{x+2y+z}{(a+2b+c)+2(a-c)+(a-2b+c)}=$$

$$=\frac{x-z}{(a+2b+c)-(a-2b+c)}=$$

$$=\frac{x-2y+z}{(a+2b+c)-2(a-c)+(a-2b+c)}.$$

Отсюда $\frac{x+2y+z}{a}=\frac{x-z}{b}=\frac{x-2y+z}{c}$, или

$$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{x-z}=\frac{c}{x-2y+z},$$

что и требовалось доказать.

228. Для того чтобы корни уравнения были действительными и различными, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положительным, т. е.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - (k+1) > 0,$$

откуда $k<1$.

Пусть это условие выполнено, тогда (поскольку сумма корней равна $2\sqrt{2}$) один из корней данного уравнения больше, а другой меньше числа $\sqrt{2}$. Обозначив корни уравнения через x_1 и x_2, имеем

$$x_1 < \sqrt{2} < x_2$$

Следовательно, в интервале $(0, \sqrt{2})$ может быть только один корень x_1, причем он должен быть положительным; но поскольку $x_2 > \sqrt{2} > 0$, то на основании теоремы Виета

$$x_1 \cdot x_2 = k + 1 > 0,$$

откуда $k>-1$. Но так как выше мы установили, что $k<1$, то в интервале $(0, \sqrt{2})$ находится один и только один корень при условии, что $-1<k<1$. Этот корень — меньший и равен

$$\sqrt{2} - \sqrt{1-k}.$$

229. Имеем $N = (11^3)^{2n+1} + 1 = 1331^{2n+1} + 1^{2n+1}$. Следовательно, число N делится, как сумма одинаковых нечетных степеней двух чисел, на сумму их оснований, т. е. на $1331+1=1332$. Но $1332 = 148 \cdot 9$, а потому число N кратно 148, что и требовалось доказать.

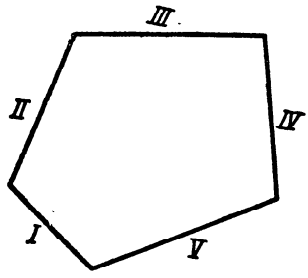

Рис. 42

230. Для удобства пронумеруем последовательно стороны пятиугольника, как показано на рис. 42. Будем решать задачу методом «от противного». Предположим, что каждая из сторон параллельна по крайней мере одной из двух не соседних с нею сторон. Пусть, например, сторона *I* параллельна стороне *IV*. Сторона *II* не соседствует со сторонами *IV* и *V*; но сторона *IV* параллельна стороне *I*, а потому сторона *II* может быть параллельна только стороне *V*. Далее, рассмотрим сторону *III*; если она пересекает стороны *II* и *IV*, то она не может быть параллельна ни стороне *V*, ни стороне *I*. К такому же результату мы пришли бы, если предположили, что сторона *I* параллельна стороне *III*. Итак, утверждение задачи доказано.

231. Поскольку коэффициенты при x и y не пропорциональны, то данная система имеет ровно одно решение

$$x = \frac{k+16}{7}, \quad y = \frac{8-3k}{7}.$$

В силу условия задачи имеем систему неравенств

$$\frac{k+16}{7} > \frac{1}{k}, \quad \frac{8-3k}{7} > 0.$$

Из второго неравенства системы получаем

$$k < \frac{8}{3}. \tag{1}$$

Первое неравенство системы перепишем последовательно так

$$\frac{k+16}{7} - \frac{1}{k} > 0, \tag{2}$$

$$\frac{k^2+16k-7}{k} > 0.$$

Поскольку числа $-8-\sqrt{71}$, $-8+\sqrt{71}$ служат корнями квадратного трехчлена $k^2+16k-7$, то последнее неравенство можно представить в таком виде

$$\frac{\left[k-\left(-8-\sqrt{71}\right)\right]\left[k-\left(-8+\sqrt{71}\right)\right]}{k} > 0,$$

или

$$\left[k-\left(-8-\sqrt{71}\right)\right]\cdot(k-0)\left[k-\left(-8+\sqrt{71}\right)\right] > 0.$$

Отсюда ясно, что все решения неравенства (2)

$$-8-\sqrt{71} < k < 0, \quad k > -8+\sqrt{71}. \tag{3}$$

Заметим, что $-8+\sqrt{71} < \sqrt{81} - 8 = 1 < \frac{8}{3}$. Таким образом, из (1) и (3) заключаем, что все значения k, удовлетворяющие условию задачи, суть числа из промежутков

$$-8-\sqrt{71} < k < 0, \quad \sqrt{71}-8 < k < \frac{8}{3}.$$

232. Если $a=1$, $b=2$, то данные уравнения имеют вид $x^3+x^2+18=0$, $x^3+2x+12=0$, или

$$(x+3)(x^2-2x+6)=0, \quad (x+2)(x^2-2x+6)=0.$$

Так как левые части этих уравнений имеют общий множитель x^2-2x+6, то данные уравнения имеют два общих корня, которые являются корнями уравнения $x^2-2x+6=0$. Отсюда $x_{1,2}=1\pm i\sqrt{5}$. Остается доказать, что при других значениях a и b данные уравнения не имеют двух общих корней. Пусть α, β, γ_1 — корни первого уравнения, а α, β, γ_2 — корни второго уравнения. На основании формул Виета из первого уравнения имеем

$$\alpha+\beta+\gamma_1 = -a, \tag{1}$$

$$\alpha\beta\gamma_1 = -18, \tag{2}$$

а из второго следует

$$\alpha+\beta+\gamma_2=0, \tag{3}$$

$$\alpha\beta\gamma_2=-12. \tag{4}$$

Из равенств (1) и (3) получаем

$$\gamma_1-\gamma_2=-a, \tag{5}$$

а из равенств (2) и (4) находим

$$2\gamma_1=3\gamma_2. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) легко определить γ_1 и γ_2

$$\gamma_1=-3a,\ \gamma_2=-2a.$$

Подставляя $\gamma_1=-3a$ в первое уравнение системы, а $\gamma_2=-2a$ во второе, получим

$$18a^3-18=0,\ \text{и}\ 8a^3+2ab-12=0.$$

Отсюда определяется единственная пара чисел $a=1$, $b=2$. Таким образом, лишь при $a=1$, $b=2$ уравнения имеют два общих корня.

233. На основании свойства ряда равных отношений каждое из данных отношений равно

$$\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{(pb+qc)+(pc+qa)+(pa+qb)}=\frac{2(x+y+z)}{(p+q)(a+b+c)}. \tag{1}$$

Умножим числители и знаменатели первого из данных отношений на a, второго на b и третьего на c. Тогда каждое из отношений равно

$$\frac{a(y+z)+b(z+x)+c(x+y)}{a(pb+qc)+b(pc+qa)+c(pa+qb)}=$$
$$=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{(p+q)(bc+ca+ab)}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) легко находим, что

$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab},$$

что и требовалось доказать.

234. Согласно условию имеем

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}-\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}=0,\ \text{или}$$
$$\frac{(x-y)[xy+yz+zx-xyz(x+y+z)}{xy(1-yz)(1-xz)}=0.$$

Поскольку по условию $x\neq y$, то $x-y\neq 0$, а потому

$$xy+yz+zx=xyz(x+y+z).$$

Так как $xyz\neq 0$, то, поделив обе части последнего равенства на xyz, получим $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z$, что и требовалось доказать

235. После преобразований данное уравнение приводится к виду

$$x^2 - (p + q + 2a^2)\, x + pq + (p + q)\, a^2 = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, нам надо доказать, что дискриминант этого уравнения $D > 0$. Действительно, имеем

$$D = (p + q + 2a^2)^2 - 4pq - 4(p + q)\, a^2 =$$

$$= 4a^4 + (p + q)^2 + 4a^2 (p + q) - 4pq - 4(p + q)\, a^2 =$$

$$= 4a^4 + (p + q)^2 - 4pq = 4a^4 + (p - q)^2 > 0 \text{ (так как } a \neq 0),$$

что, очевидно, имеет место при любых действительных значениях a, p, q. Следовательно, уравнение (1), а вместе с ним и исходное, имеет действительные корни.

236. Данное уравнение имеет корни $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4a}\right)$. Для того чтобы корни были действительными, необходимо и достаточно, чтобы было $1 - 4a \geqslant 0$, т. е. $a \leqslant \frac{1}{4}$. Если меньший корень больше a, то и больший корень больше a. Следовательно, должно быть $\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1 - 4a}\right) > a$, или $\sqrt{1 - 4a} < -1 - 2a$. Так как $\sqrt{1 - 4a} \geqslant 0$, то $-1 - 2a > 0$, или $a < -\frac{1}{2}$. Далее, имеем

$$\left(\sqrt{1 - 4a}\right)^2 < (-1 - 2a)^2,$$

или

$$1 - 4a < 1 + 4a + 4a^2.$$

или

$$a(a + 2) > 0.$$

Но так как $a < -\frac{1}{2}$, то $a + 2 < 0$, или $a < -2$.

Итак, имеем систему $a \leqslant \frac{1}{4}$, $a < -\frac{1}{2}$, $a < -2$. Отсюда $a < -2$.

Впрочем, эту задачу можно решить и иначе.

Для того чтобы корни были действительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $1 - 4a \geqslant 0$. Отсюда $a \leqslant \frac{1}{4}$. Так как оба корня должны быть действительными и больше a, то подставляя в функцию $f(x) = x^2 + x + a$ вместо x число a, получим $f(a) = a^2 + 2a > 0$. Далее, поскольку

$$a < \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } x_1 + x_2 = -1, \text{ то } a < -\frac{1}{2}.$$

Итак, параметр a должен удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant \frac{1}{4}, \\ a < -\frac{1}{2}, \\ a(a+2) > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Так как $a(a+2)>0$ выполняется при $a>0$ или при $a<-2$, то система (1) распадается на две системы

$$\begin{cases} a \leqslant \frac{1}{4} \\ a < -\frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a \leqslant \frac{1}{4}, \\ a < -\frac{1}{2}, \\ a < -2. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а из второй — следует, что $a<-2$.

Отв. Все значения $a<-2$.

237. Разность $N-264=(49^n-16^n)-33$ кратна 33, так как 49^n-16^n делится на разность $49-16=33$. Далее $N-264=(7^{2n}-1^{2n})-16^n-16\cdot 2$ — кратно 8, так как $7^{2n}-1^{2n}$ делится на $7+1=8$. Но 33 и 8 — взаимно простые числа. Следовательно, разность $N-264$ делится на $33\cdot 8=264$, а потому и число N делится на 264.

238. Имеем $7^{21}-487 = 7\cdot(7^2)^{10}-(7+480) = 7\cdot 49^{10}-7-480 = 7(49^{10}-1^{10})-480 = 7\cdot(49-1)(49^9+49^8+\ldots+49+1)-480 = 48[7(49^9+49^8+\ldots+49+1)-10]$.

Так как $288=6\cdot 48$, то остается доказать, что

$$7(49^9+49^8+\cdots+49+1)-10 \qquad (1)$$

делится на 6. Известно, что 49^p-1 делится на $49-1=48=6\cdot 8$; поэтому $49^p=6k+1$. Выражение (1) имеет вид

$$7(6m+10)-10=7\cdot 6m+60=6(7m+10).$$

Следовательно, выражение (1) кратно шести.

239. Пусть высоты AD, BE, CF треугольника ABC (рис. 43) пересекаются в точке O. Требуется доказать, что если $AB<BC<AC$, то $OF<OD<OE$. Так как удвоенная площадь треугольника ABC равна $AB\cdot CF=BC\cdot AD=AC\cdot BE$, то $BE<AD<CF$.

Из подобия треугольников FBO и ECO следует, что

$$\frac{OF}{OE}=\frac{OB}{OC},$$

или $\dfrac{OF}{OE}=\dfrac{BE-OE}{CF-OF}$. Отсюда получаем

$$OF\cdot CF-OF^2=BE\cdot OE-OE^2,$$

или $OF^2-OE^2=OF\cdot CF-BE\cdot OE>BE(OF-OE)$. Если предположить, что $OF>OE$, то имеем

$$OF+OE>BE. \qquad (1)$$

Но так как из прямоугольного треугольника BOF следует, что $OF<OB$, то

$$OF + OE < OB + OE = BE. \qquad (2)$$

Поскольку неравенства (1) и (2) противоречивы и так как неравенство (2) верное, то неравенство (1) неверное. Но неравенство (1) получено из предположения, что $OF>OE$. Следовательно, верно противное, а именно: $OF<OE$. Аналогично доказывается, что $OF<OD$.

240. Продолжим BM до пересечения с прямой a в точке A_1 (рис. 44). Так как точка M расположена на равном расстоянии от

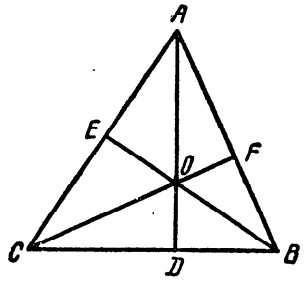

Рис. 43

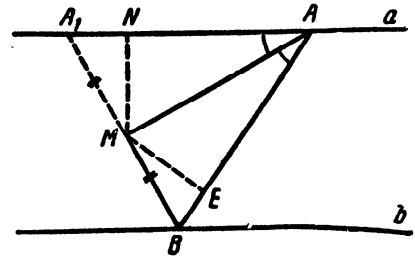

Рис. 44

прямых a и b, то $BM=MA_1$. Следовательно, треугольник AA_1B равнобедренный, так как AM является его высотой и медианой, а потому $\angle MAA_1=\angle MAB$.

Далее, из точки M опустим перпендикуляры ME и MN на прямые AB и a. Эти перпендикуляры равны, так как треугольники ANM и AEM равны между собой. Итак, длина перпендикуляра ME равна половине расстояния между a и b, т. е. утверждение задачи верно.

241. Пусть $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$, т. е. $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2$, ..., $a_n=kb_n$. Тогда

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)=$$
$$=k^2\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)^2. \qquad (1)$$

Далее,

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2=k^2\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)^2. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует доказываемое равенство. Наоборот, пусть теперь выполняется равенство

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)=$$
$$=\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2.$$

На основании этого равенства для любого p имеет место следующее преобразование

$$(a_1 - pb_1)^2 + (a_2 - pb_2)^2 + \cdots + (a_n - pb_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) -$$
$$- 2p(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) + p^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2p \cdot \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)} +$$
$$+ p^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} - \right.$$
$$\left. - p\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\right)^2.$$

Следовательно, при $p = \dfrac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}$ сумма квадратов будет равняться нулю. И так как каждое слагаемое должно быть нулем, то получаем

$$p = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

242. Пусть $x^2 - 3x + 4 = z$, тогда $x^2 - 3x + 3 = z - 1$ и $x^2 - 3x + 5 = z + 1$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z} = \frac{6}{z+1},$$

или

$$3z^2 - 7z + 2 = 0,$$

откуда $z_1 = 2$, $z_2 = \dfrac{1}{3}$.

Итак, имеем два уравнения

$$x^2 - 3x + 4 = 2 \text{ и } x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{3}.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а из второго

$$x_{3,4} = \frac{9 \pm i\sqrt{51}}{6}.$$

243. Имеем $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$. Следовательно, в силу условия задачи должно иметь место равенство

$$\frac{\sqrt{a} - b}{c} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + b}{c}\right)^2 - 1,$$

или

$$\frac{\sqrt{a} - b}{c} = \frac{2\left(a + b^2 + 2b\sqrt{a}\right)}{c^2} - 1,$$

или

$$(c-4b)\sqrt{a}=2(a+b^2)-c^2+bc.$$

Так как по условию задачи a не есть точный квадрат, то $\sqrt{a}$ — иррациональное число, а потому последнее равенство возможно лишь тогда, когда

$$c-4b=0$$

и

$$2(a+b^2)-c^2+bc=0,$$

откуда

$$c=4b,\quad a=5b^2.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha=\frac{b\sqrt{5}+b}{4b}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad \cos 2\alpha=\frac{b\sqrt{5}-b}{4b}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Далее, имеем

$$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=\frac{2\left(6-2\sqrt{5}\right)}{16}-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Следовательно, $\cos 4\alpha=-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$. Отсюда следует, что или $4\alpha=\pi-\alpha+2k\pi$, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}$, или

$$4\alpha=-(\pi-\alpha)+2n\pi,\ \text{т. е.}\ \alpha=-\frac{\pi}{3}+\frac{2n\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{2m\pi}{3}.$$

Но так как по условию α — острый угол, то или $\alpha=\frac{\pi}{5}$, или $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Но $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\neq\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Отв. $\alpha=\frac{\pi}{5}$, $a=5b^2$, $c=4b$, где b — любое натуральное число.

244. Имеем

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,\quad b^2+c^2\geqslant 2bc,\quad a^2+c^2\geqslant 2ac. \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ac)$, откуда $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$. Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

245. Пусть BM медиана треугольника BDF и пусть продолжение этой медианы пересекает AC в точке N (рис. 45). Достроим треугольник BDF до параллелограмма $BDKF$. Поскольку $\angle ABC=\angle ABN+\angle NBC=90^\circ-\angle DBK+90^\circ-\angle KBF=180^\circ-\angle DBK-\angle BKD=\angle KDB$,

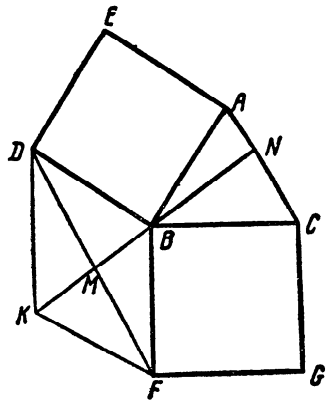

Рис. 45

$KD=BC$ и $AB=BD$, то треугольники ABC и BDK равны, а потому $\angle BAC=\angle DBK$, т. е. $\angle ABN+\angle BAC=\angle ABN+\angle DBK=90°$. Следовательно, отрезок BN является высотой треугольника ABC. Наоборот, пусть теперь BN — высота треугольника ABC и M — точка ее пересечения с DF. Проведем DK параллельно BF до пересечения с продолжением BM в точке K. Треугольники ABC и BKD равны, так как $AB=BD$, $\angle BAC=90°-\angle ABN=\angle KBD$, $\angle ABC=\angle KDB$, а потому $KD=BF$. Следовательно, четырехугольник $BDKF$ — параллелограмм, а потому BM — медиана треугольника DBF.

246. Поскольку данное равенство есть тождество, то оно имеет место и при $x=c+h$, т. е.

$$a_0+a_1(c+h)+a_2(c+h)^2+\cdots+a_n\cdot(c+h)^n=$$
$$=h^2\left[b_0+b_1(c+h)+\cdots+b_{n-2}(c+h)^{n-2}\right].$$

В этом равенстве должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях h. В частности, для коэффициентов при h^1 получаем

$$a_1+2a_2c+\cdots+na_n\cdot c^{n-1}=0,$$

что и требовалось доказать.

247. Поскольку α, β, γ — решение данной системы, то имеем три равенства

$$1+\alpha+\beta+\gamma=0, \qquad (1)$$
$$a+b\alpha+c\beta+d\gamma=0, \qquad (2)$$
$$a^2+b^2\alpha+c^2\beta+d^2\gamma=0. \qquad (3)$$

Из равенства (1) находим $\alpha=-(1+\beta+\gamma)$. Подставляя это значение α в равенства (2) и (3), получаем

$$(a-b)+(c-b)\beta+(d-b)\gamma=0,$$
$$(a^2-b^2)+(c^2-b^2)\beta+(d^2-b^2)\gamma=0.$$

Отсюда нетрудно найти β и γ.

$$\beta=-\frac{(a-d)(a-b)}{(c-b)(c-d)},\quad \gamma=-\frac{(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}.$$

Подставляя найденные значения β и γ в равенство (1), получаем

$$\alpha=-\frac{(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}.$$

Следовательно,

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=\frac{(a-b)^2(a-c)^2\cdot(a-d)^2}{(b-c)^2(c-d)^2(d-b)^2}>0,$$

что и требовалось доказать.

248. Перепишем данное уравнение в виде

$$x^4-x^3+x^2-x^3+x^2-x+2x^2-2x+2=0,$$

или

$$x^2(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)+2(x^2-x+1)=0,$$

или

$$(x^2-x+1)(x^2-x+2)=0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два

$$x^2-x+1=0 \text{ и } x^2-x+2=0.$$

Из первого уравнения находим $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, а из второго получаем $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

249. Перепишем данное уравнение в виде $2x^3-2x^2+2x-x^2+x-1=0$, или $2x(x^2-x+1)-(x^2-x+1)=0$, т. е. $(2x-1)(x^2-x+1)=0$. Таким образом, данное уравнение распадается на два: $2x-1=0$ и $x^2-x+1=0$. Из первого уравнения находим $x_1=\frac{1}{2}$, а из второго $x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

250. Поскольку $\cos\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}$, то левая часть доказываемого равенства равна

$$2\left(\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}\right)=2\left[\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right]=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$$

251. Так как $\cos^2 15^\circ=\frac{1+\cos 30^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)$, то $\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Имеем

$$\cos 86^\circ 15' = \sin 3^\circ 45' = \sqrt{\frac{1-\cos 7^\circ 30'}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos 15^\circ}{2}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$

что и требовалось доказать.

252. Имеем тождественные неравенства

$$\left.\begin{aligned} x^2 + a_1^2 + a_2^2 &\geqslant xa_1 + xa_2 + a_1 a_2, \\ x^2 + a_2^2 + a_3^2 &\geqslant xa_2 + xa_3 + a_2 a_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^2 + a_n^2 + a_1^2 &\geqslant xa_n + xa_1 + a_n a_1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим

$$nx^2 + 2\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \geqslant 2x\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) + \\ + a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1. \qquad (2)$$

Поскольку неравенства (1) имеют место при любом значении x, то пусть

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} + 2\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} + a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1,$$

откуда получаем

$$\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)^2 \leqslant n\left[2\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) - \right.$$

$$\left. - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \cdots + a_n a_1)\right].$$

Равенство достигается лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

253. Первое решение. Так как $a+b \geqslant 1$, то $a^2+2ab+b^2 \geqslant 1$. Сложив это неравенство с очевидным неравенством $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$, получим $2a^2+2b^2 \geqslant 1$, или $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Возведя обе части этого неравенства в квадрат, получим $a^4+2a^2b^2+b^4 \geqslant \frac{1}{4}$. Сложив последнее неравенство с очевидным неравенством $a^4-2a^2b^2+b^4 \geqslant 0$, получим $2a^4+2b^4 \geqslant \frac{1}{4}$, или $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

Второе решение. Пусть $a=\frac{1}{2}+x$, $b=\frac{1}{2}-y$, где $x-y\geqslant 0$. Тогда

$$a^4=\left(\frac{1}{2}+x\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2+2x^3+x^4,$$

$$b^4=\left(\frac{1}{2}-y\right)^4=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}y^2-2y^3+y^4$$

и

$$a^4+b^4=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(x-y)+\frac{3}{2}(x^2+y^2)+2(x^3-y^3)+x^4+y^4\geqslant\frac{1}{8}.$$

Знак равенства имеет место только при $a=b=\frac{1}{2}$ $(x=y=0)$.

254. Перепишем доказываемое равенство в виде

$$\left(\frac{A_1P}{A_1O}-1\right)+\left(\frac{B_1P}{B_1O}-1\right)+\left(\frac{C_1P}{C_1O}-1\right)=0,$$

или

$$\frac{A_1P-A_1O}{A_1O}+\frac{B_1P-B_1O}{B_1O}+\frac{C_1P-C_1O}{C_1O}=0. \qquad (1)$$

Из рис. 46 видно, что $A_1P-A_1O=-OP$, $B_1P-B_1O=OP$ и $C_1P-C_1O=-OP$. Следовательно, равенство (1) принимает вид

$$-\frac{OP}{A_1O}+\frac{OP}{OB_1}-\frac{OP}{OC_1}=0.$$

Таким образом, нам надо доказать следующее равенство

$$\frac{1}{A_1O}+\frac{1}{C_1O}=\frac{1}{B_1O}.$$

Обозначим $\angle B_1C_1C$ через α. Проведем через точку O отрезок $MN\|AC$ (точки M и N принадлежат сторонам AB и BC).

Пусть $OF=r$; тогда $AC=2r\sqrt{3}$, $MO=ON=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$. В треугольнике A_1MO найдем длину OA_1 по теореме синусов;

$$OA_1=\frac{MO\cdot\sin 120^\circ}{\sin(60^\circ-\alpha)}=\frac{2r\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}=\frac{r}{\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

Аналогично из треугольника OB_1N находим

$$OB_1=\frac{ON\cdot\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\alpha)}=\frac{2r\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}=\frac{r}{\sin(60^\circ+\alpha)}.$$

Из треугольника C_1OF находим $C_1O=\dfrac{r}{\sin\alpha}$.

Поэтому

$$\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{C_1O}=\frac{\sin(60^\circ-\alpha)+\sin\alpha}{r}=\frac{2\sin 30^\circ\cdot\cos(30^\circ-\alpha)}{r}=$$

$$=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{r}=\frac{1}{OB_1},$$

что и требовалось доказать.

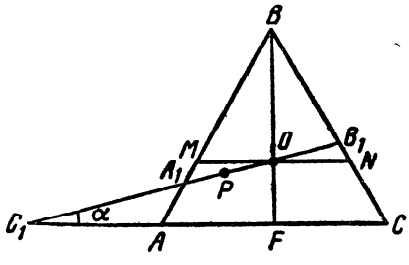

Рис. 46

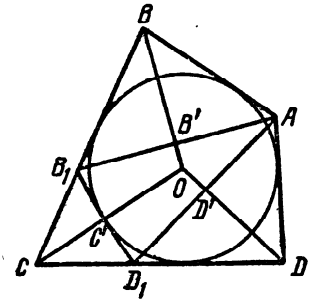

Рис. 47

255. Пусть четырехугольник $ABCD$ такой, что $AD+BC=AB+CD$. Для определенности пусть $AB<BC$, $AD<CD$. Отложим на BC отрезок $BB_1=AB$, а на CD — отрезок $DD_1=AD$. Так как $AD+BC=AB+CD$, или $AD+CB_1+AB=AD+CD_1+AB$, то $CB_1=CD_1$, т. е. треугольник CB_1D_1 равнобедренный. Треугольники B_1BA и D_1DA также равнобедренные (по построению). В полученных трех равнобедренных треугольниках проводим высоты BB_1, CC_1, DD_1. Ясно, что прямые BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке O — центре окружности, описанной около треугольника AB_1D_1; эта точка равноудалена от всех сторон четырехугольника. Следовательно, точка O является центром вписанного в данный четырехугольник круга.

256. Имеем

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

257. Пусть $x=y\sqrt{2}$. Тогда данное уравнение перепишется в виде

$$2y^3\sqrt{2}-y\sqrt{2}-\sqrt{2}=0, \text{ или } 2y^3-y-1=0, \text{ или } 2y^3-2y^2+$$
$$+2y^2-2y+y-1=0, \text{ или } (y-1)(2y^2+2y+1)=0.$$

Отсюда $y_1=1$, $y_{2,3}=\dfrac{-1\pm i}{2}$. Следовательно,

$$x_1=\sqrt{2}\ ,\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}.$$

258. Имеем

$$\left(\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{3}=2\cos\frac{5\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}+$$
$$+\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{5\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

259. Имеем очевидное неравенство $2ab\leqslant a^2+b^2$, или $a^2+b^2+2ab\leqslant$ $\leqslant 2a^2+2b^2$, или $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{4}\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$, или $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$, или

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \text{ а поэтому и } \frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Равенство достигается лишь при $a=b\geqslant 0$.

260. Пусть отрезок EF, параллельный основаниям трапеции $ABCD$, делит эту трапецию на две равновеликие части (рис. 48). Продолжим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке M. Из подобия треугольников AMD и BMC имеем

$$\frac{2Q+S}{S}=\frac{a^2}{b^2}, \qquad (1)$$

где S — площадь треугольника BMC, $2Q$ — площадь трапеции $ABCD$. Из подобия треугольников EMF и BMC получаем таким же образом, что

$$\frac{Q+S}{S}=\frac{x^2}{b^2}, \qquad (2)$$

где $EF=x$.

Из (1) и (2) следует

$$2\cdot\frac{Q+S}{S}-\frac{2Q+S}{S}=\frac{2x^2}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}, \text{ или}$$

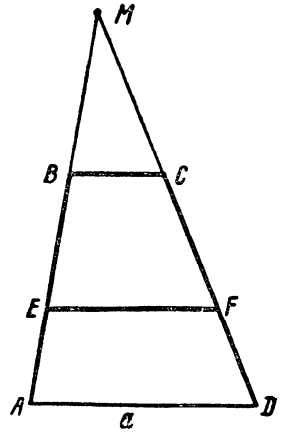

Рис. 48

$1 = \frac{2x^2 - a^2}{b^2}$, откуда $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, т. е. $EF = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

261. Имеем

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{n-3} + \frac{n}{n-2} +$$

$$+ \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n} = \left(\frac{n-1}{1} + 1\right) + \left(\frac{n-2}{2} + 1\right) + \left(\frac{n-3}{3} + 1\right) +$$

$$+ \cdots + \left[\frac{n-(n-3)}{n-3} + 1\right] + \left[\frac{n-(n-2)}{n-2} + 1\right] +$$

$$+ \left[\frac{n-(n-1)}{n-1} + 1\right] + \left[\frac{n-n}{n} + 1\right] = n +$$

$$+ \left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-3}{3} + \cdots + \frac{3}{n-3} + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right).$$

262. Имеем

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = [(1-1)+1] + \left[\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 1\right] + \cdots + \left[\left(\frac{1}{n} - 1\right) + 1\right] = n -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right).$$

263. Перепишем данное уравнение в виде

$$x^2 - 10 \cdot \frac{x^2}{x+5} + \frac{25x^2}{(x+5)^2} + 10 \cdot \frac{x^2}{x+5} - 11 = 0,$$

или

$$\left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + 10\frac{x^2}{x+5} - 11 = 0,$$

или

$$\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + 10 \cdot \frac{x^2}{x+5} - 11 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\frac{x^2}{x+5}$, получим

$$\left(\frac{x^2}{x+5}\right)_1 = 1, \quad \left(\frac{x^2}{x+5}\right)_2 = -11, \text{ или}$$

$$x^2 - x - 5 = 0, \quad x^2 + 11x + 55 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-11 \pm 3i\sqrt{11}}{2}.$$

264. Пусть $x + \frac{1}{2} = z$, тогда

$$(z-1)^4 + (z+1)^4 = 82, \text{ или}$$

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 = 82, \text{ или}$$

$$z^4 + 6z^2 - 40 = 0,$$

откуда $z^2 = 4$ и $z^2 = -10$, поэтому

$$z_{1,2} = \pm 2, \quad z_{3,4} = \pm i\sqrt{10}.$$

Так как $x = z - \frac{1}{2}$, то

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{10}.$$

265. Имеем $\operatorname{tg} 7°30' + \operatorname{tg} 37°30' + \operatorname{tg} 67°30' = \frac{\sin 45°}{\cos 7°30' \cdot \cos 37°30'} +$

$$+ \frac{1 - \cos 135°}{\sin 135°} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 45° + \cos 30°} + \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} +$$

$$+ \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{6} + \sqrt{2} - 3.$$

Далее

$$\operatorname{tg} 22°30' + \operatorname{tg} 52°30' + \operatorname{tg} 82°30' = \frac{1 - \cos 45°}{\sin 45°} +$$

$$+ \frac{\sin 135°}{\cos 82°30' \cdot \cos 52°30'} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{\cos 135° + \cos 30°} =$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{6} + \sqrt{2} + 3.$$

Таким образом, левая часть доказываемого равенства равна

$$(2\sqrt{6}+\sqrt{2}-3)(2\sqrt{6}+\sqrt{2}+3)=(2\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-$$
$$-9=17+8\sqrt{3}\,.$$

266. Имеем $\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}50^\circ=\dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 60^\circ\cdot\cos 30^\circ}+$

$$+\frac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ\cdot\cos 50^\circ}=\frac{2}{\cos 30^\circ}+\frac{2}{\cos 90^\circ+\cos 10^\circ}=\frac{2}{\cos 30^\circ}+\frac{2}{\cos 10^\circ}=$$

$$=2\cdot\frac{\cos 10^\circ+\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ}=\frac{4\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 10^\circ}=\frac{8\sqrt{3}\cos 20^\circ}{3}\,.$$

267. Первое решение. Доказываемое неравенство перепишем последовательно так

$$a^3-a^2\geqslant 2\sqrt{a}-2,$$
$$a^2(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)\geqslant 2(\sqrt{a}-1)\,. \qquad (1)$$

Если $a=1$, то имеет место равенство, если $a=0$, то достигается строгое неравенство. Если $a>1$, то для доказательства неравенства (1) достаточно установить, что $a^2(\sqrt{a}+1)>2$, что верно, так как $a^2>1$, $\sqrt{a}+1>2$. Наконец, если $0<a<1$, то неравенство (1) следует из неравенства $a^2(\sqrt{a}+1)<2$, которое верно, так как $a^2<1$, $\sqrt{a}+1<2$. Итак, если $a\geqslant 0$, но $a\neq 1$, то имеет место строгое неравенство и лишь при $a=1$ достигается равенство.

Второе решение. Так как

$$(a^3+2)-(a^2+2\sqrt{a})=a^3-a^2-2\sqrt{a}+2=a^3-a^2+a-$$
$$-2\sqrt{a}+1-a+1=(\sqrt{a}-1)^2+(a-1)^2(a+1)\geqslant 0,$$

то $a^3+2\geqslant a^2+2\sqrt{a}$. Равенство достигается лишь при $a=1$.

268. Имеем $(ab+bc+ca)^2-3abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+$

$$+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2-3a^2bc-3ab^2c-3abc^2=\frac{1}{2}[(a^2b^2+b^2c^2-$$
$$-2ab^2c)+(a^2b^2+c^2a^2-2a^2bc)+(b^2c^2+c^2a^2-2abc^2)]=\frac{1}{2}[(ab-bc)^2+$$
$$+(ab-ca)^2+(bc-ca)^2]\geqslant 0.$$ Поэтому
$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc(a+b+c).$$

269. Пусть ромб $A_1B_1C_1D_1$ вписан в квадрат $ABCD$ (рис. 49). Так как углы D_1A_1A и B_1C_1C равны между собой, а также $B_1C_1=A_1D_1$, как стороны ромба, то треугольники B_1C_1C и D_1A_1A равны; значит $CC_1=AA_1$ и $B_1C=AD_1$, а потому треугольники A_1B_1B и C_1DD_1 равны.

Пусть $AB=a$, $A_1B_1=b$, $AA_1=CC_1=x$, $BB_1=DD_1=y$.

Тогда из треугольников AA_1D_1 и A_1BB_1 следует

$$x^2 + (a - y)^2 = b^2,$$

$$(a - x)^2 + y^2 = b^2, \text{ поэтому}$$

$$x^2 + (a - y)^2 = (a - x)^2 + y^2, \text{ или}$$

$$x^2 + a^2 - 2ay + y^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2,$$

откуда $x = y$.

Поэтому $AA_1 = BB_1$, $A_1B_1 = A_1D_1$, следовательно, $\triangle AA_1D_1 = \triangle A_1BB_1$.

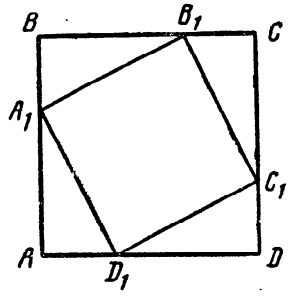

Рис. 49

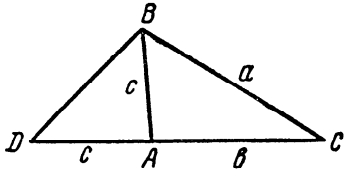

Рис. 50

Поэтому $\angle AA_1D_1 = \angle A_1B_1B = 90° - \angle BA_1B_1$, т. е.

$$\angle AA_1D_1 + \angle BA_1B_1 = 90°,$$

следовательно, $\angle B_1A_1D_1 = 180° - 90° = 90°$.

Таким образом, в ромбе $A_1B_1C_1D_1$ угол $A_1 = 90°$, а поэтому $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

270. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 50). На продолжении стороны AC отложим $AD = c$. Поделив обе части равенства $a^2 = b^2 + bc$ на ab, получим

$$\frac{a}{b} = \frac{b + c}{a}.$$

Это равенство показывает, что треугольники CAB и CBD подобны, а потому $\angle A = \angle CBD$. Кроме того, $\angle B = \angle D = \angle DBA$. Следовательно,

$$\angle A = \angle B + \angle DBA = 2\angle B,$$

что и требовалось доказать.

271. Доказываемое равенство перепишем в виде

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Левая часть этого равенства есть сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении бинома и, как известно, эта сумма равна 2^{n-1}. Таким образом, утверждение задачи верно.

272. Легко заметить, что $x \neq 0$. Разделим числители и знаменатели слагаемых левой части данного уравнения на x:

$$\frac{3}{2x-4+\frac{5}{x}}+\frac{2}{2x-6+\frac{5}{x}}=3.$$

Пусть $2x+\frac{5}{x}=y$. Тогда имеем

$$\frac{3}{y-4}+\frac{2}{y-6}=3,$$

или

$$3y^2-35y+98=0.$$

Отсюда $y_1=7$, $y_2=\frac{14}{3}$. Таким образом, имеем два уравнения

$$2x+\frac{5}{x}=7 \text{ и } 2x+\frac{5}{x}=\frac{14}{3}$$

Из первого уравнения получаем $x_1=1$, $x_2=\frac{5}{2}$, а из второго

$$x_{3,4}=\frac{7\pm i\sqrt{41}}{6}.$$

273. Имеем

$$\frac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)+$$
$$+1+\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1.$$

274. Имеем очевидное неравенство $x^2+y^2>2xy$, из которого умножением на ab $(ab>0)$ получим

$$ab(x^2+y^2)>2abxy. \tag{1}$$

Прибавив к обеим частям неравенства (1) выражение $(a^2+b^2)xy$, получим

$$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)>(a^2+b^2)xy+2abxy,$$

или

$$(ax+by)(ay+bx)>(a+b)^2xy. \tag{2}$$

Так как $(a+b)(ay+bx)>0$, то, поделив обе части неравенства (2) на $(a+b)(ay+bx)$, получим $\frac{(a+b)xy}{ay+bx}<\frac{ax+by}{a+b}$, что и требовалось доказать.

275. Пусть сторона одного из вписанных квадратов принадлежит стороне треугольника, длина которой a, а сторона другого принадлежит другой стороне треугольника, длина которой b. Введем обозначения: сторона квадрата x, высоты треугольника, опущенные на стороны a и b, равны h_a и h_b. Легко заметить, что сторона впи-

санного квадрата отсекает от данного треугольника треугольник, подобный данному. Таким образом, имеем две пары подобных треугольников. Из одной пары имеем $\frac{a}{x}=\frac{h_a}{h_a-x}$, а из другой пары $\frac{b}{x}=\frac{h_b}{h_b-x}$. Отсюда находим $x=\frac{a\cdot h_a}{a+h_a}=\frac{b\cdot h_b}{b+h_b}$. Удвоенная площадь треугольника $2S=a\cdot h_a=b\cdot h_b$; значит, $a+h_a=b+h_b$. Отсюда находим $b-a=h_a-h_b=\frac{2S}{a}-\frac{2S}{b}$, или $(b-a)\left(1-\frac{2S}{ab}\right)=0$. Из этого уравнения следует, что или $b=a$, или $S=\frac{ab}{2}$, т. е. треугольник или равнобедренный или прямоугольный. Прямоугольный треугольник не удовлетворяет условию задачи, так как в этом случае оба квадрата сливаются в один.

276. Перепишем левую часть доказываемого равенства в виде

$$\frac{a}{a-1}\cdot\frac{2a-2}{2a-1}\cdot\frac{3a}{3a-1}\cdots\frac{(2n-1)a}{(2n-1)a-1}\cdot\frac{2na-2}{2na-1},$$

или

$$\frac{[1\cdot a\cdot 3\cdot a\cdot 5\cdot a\cdots(2n-1)a]\times}{[(a-1)(2a-1)(3a-1)\cdots(na-1)][(n+1)a-1]\times}\times$$
$$\times\frac{\times[(2a-2)(4a-2)\cdots(2na-2)]}{\times[(n+2)a-1]\cdots[(n+n)a-1]},$$

или

$$\frac{1\cdot a\cdot 3\cdot a\cdot 5\cdot a\cdots(2n-1)a\cdot(a-1)\cdot(2a-1)\cdots(na-1)}{[(n+1)a-1]\cdots[(n+n)a-1]\cdot(a-1)\cdot(2a-1)\cdots(na-1)}\cdot 2^n,$$

или

$$\frac{1\cdot a\cdot 3\cdot a\cdot 5\cdot a\cdots(2n-1)a}{[(n+1)a-1]\cdots[(n+n)a-1]}\cdot 2^n. \qquad (1)$$

Но поскольку

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2^n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot 2^n=$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=(n+1)(n+2)\cdots(n+n),$$

то выражение (1) перепишется в виде

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\cdot a^n}{[(n+1)a-1]\cdots(n+n)a-1]},$$

или

$$\frac{(n+1)a}{(n+1)a-1}\cdot\frac{(n+2)a}{(n+2)a-1}\cdots\frac{(n+n)a}{(n+n)a-1}.$$

Таким образом, левая часть равна тождественно правой.

277. Так как a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2$$

Поделив обе части этого равенства на произведение $(a+b)(b+c)(a+c)$, получим

$$\frac{b-a}{(b+c)(a+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)},$$

или

$$\frac{(b+c)-(a+c)}{(b+c)(a+c)} = \frac{(c+a)-(a+b)}{(a+b)(a+c)},$$

т. е.

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}.$$

Из этого равенства следует, что $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию.

278. Обозначим $z=x+yi$. Тогда данное уравнение можно переписать в виде $\sqrt{x^2+y^2}-x-yi=1+2i$. На основании условия равенства двух комплексных чисел имеем

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = 1, \quad y = -2.$$

Подставляя $y=-2$ в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x^2+4} = 1 + x, \text{ или } x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2,$$

откуда $x=\frac{3}{2}$. Таким образом, искомое $z=1{,}5-2i$.

279. Так как $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, а $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, то данную систему можно переписать в виде

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8, \quad (x+y)^2 - 2xy = 4.$$

Пусть $x+y=u$, $xy=v$. Тогда система принимает вид

$$u^3 - 3uv = 8, \quad u^2 - 2v = 4.$$

Из первого уравнения имеем $v=\frac{u^3-8}{3u}$, а из второго $v=\frac{u^2-4}{2}$.

Таким образом, $\frac{u^3-8}{3u} = \frac{u^2-4}{2}$, или

$$2(u-2)(u^2+2u+4) - 3u(u-2)(u+2) = 0.$$

Перепишем последнее уравнение так

$(u-2)(2u^2+4u+8-3u^2-6u)=0$, или $(u-2)(u^2+2u-8)=0$.

Отсюда находим

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = -4.$$

Итак, имеем два различных значения u, т. е. $u_1=2$, $u_2=-4$. Соответствующие им значения v таковы: $v_1=0$, $v_2=6$. Следовательно, данная система сводится к двум системам

$$x+y=2,\quad xy=0 \text{ и } x+y=-4,\quad xy=6,$$

Решая их, находим четыре решения первоначальной системы

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-2+i\sqrt{2}, \\ y_3=-2-i\sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-2-i\sqrt{2}, \\ y_4=-2+i\sqrt{2}. \end{cases}$$

280. Имеем

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=-\operatorname{tg}C\,(1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B). \qquad (1)$$

$1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\neq 0$, так как если $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B=1$, то из условия следует, что $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=0$, т. е. $\operatorname{tg}^2A=-1$, что невозможно. Разделив обе части равенства (1) на $1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B$, получим $\operatorname{tg}(A+B)=\operatorname{tg}(-C)$. Отсюда $A+B+C=n\pi$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

281. Поскольку $p=-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=-\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и $q=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, то подлежащее вычислению выражение перепишется в виде

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\frac{\sin^2(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\cos^2(\alpha+\beta),$$

$$\text{или } \sin^2(\alpha+\beta)\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\cos^2(\alpha+\beta),$$

или

$$\sin^2(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\cos^2(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta,$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\,[\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)],$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно, данное выражение равно q.

282. Имеем очевидные неравенства:

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2c^2 &\geqslant 2abc, \\ b^2+c^2a^2 &\geqslant 2abc, \\ c^2+a^2b^2 &\geqslant 2abc, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим

$$a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+c^2a^2\geqslant 6abc,$$

или

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geqslant 6abc.$$

Равенство достигается лишь при: 1) $a=b=c=0$; 2) $a=b=c=1$; 3) $a=1$, $b=c=-1$; 4) $b=1$, $a=c=-1$; 5) $c=1$, $a=b=-1$.

283. Имеем $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $c(a^2+b^2) \geqslant 2abc$. Аналогично, $a(b^2+c^2) \geqslant 2abc$ и $b(c^2+a^2) \geqslant 2abc$. Сложив почленно последние три неравенства, получим

$$c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2) \geqslant 6abc,$$

или

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqslant 6abc.$$

Таким образом, левое неравенство доказано. Далее имеем $2ab \leqslant a^2+b^2$, или $ab \leqslant a^2+b^2-ab$. Умножив последнее неравенство на $(a+b)$, получим

$$ab(a+b) \leqslant a^3+b^3. \tag{1}$$

Аналогично

$$bc(b+c) \leqslant b^3+c^3 \tag{2}$$

и

$$ca(c+a) \leqslant c^3+a^3. \tag{3}$$

Сложив почленно неравенства (1), (2) и (3), получим

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leqslant 2(a^3+b^3+c^3).$$

Итак, мы доказали и правое неравенство.

284. Первое решение. Пусть AD — биссектриса угла треугольника ABC (рис. 51). Обозначим отрезки BD и DC стороны BC через m и n, стороны AC и BA — через b и c, а AD — через l_A.

Опишем около треугольника окружность и продолжим биссектрису AD до пересечения с этой окружностью в точке M. Так как углы BAM и CAD равны, а также равны углы AMB и ACB, как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу, то треугольники ABM и ADC подобны.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{l_A}{c} = \frac{b}{l_A+DM},$$

откуда

$$l_A^2 + l_A \cdot DM = b \cdot c. \tag{1}$$

Но так как произведения отрезков каждой из двух пересекающихся хорд равны, то

$$l_A \cdot DM = m \cdot n. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$l_A^2 = bc - mn.$$

Второе решение. Имеем

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{l_A^2+c^2-m^2}{2c \cdot l_A} = \frac{l_A^2+b^2-n^2}{2b \cdot l_A},$$

откуда

$$b \cdot l_A^2 + bc^2 - m^2 b = c \cdot l_A^2 + b^2 c - cn^2. \qquad (3)$$

Поскольку

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b},$$

то

$$m = cx, \quad n = bx,$$

где x — коэффициент пропорциональности. Таким образом, из (3) следует

$$(b - c) \cdot l_A^2 = bc(b - c) - bcx^2(b - c),$$

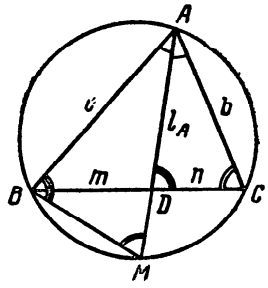

Рис. 51

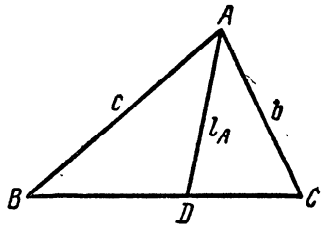

Рис. 52

откуда

$$l_A^2 = bc - b \cdot x \cdot c \cdot x = bc - mn.$$

285. Площадь треугольника ABC (рис. 52) равна

$$0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \sin A. \qquad (1)$$

С другой стороны, площадь этого же треугольника равна сумме площадей треугольников ABD и ACD (D — основание биссектрисы угла A), т. е. равна

$$0{,}5\, l_A (b + c) \cdot \sin \frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Приравняв (1) и (2), получаем

$$0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \sin A = 0{,}5\, l_A (b + c) \cdot \sin \frac{A}{2},$$

или

$$2b \cdot c \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = l_A \cdot (b + c) \cdot \sin \frac{A}{2},$$

откуда

$$l_A = \frac{2b \cdot c \cdot \cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Аналогично находим

$$l_B = \frac{2a \cdot c \cdot \cos\frac{B}{2}}{a+c}, \quad l_C = \frac{2a \cdot b \cdot \cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

286. Вначале заметим, что в силу принятых в задаче обозначений имеем

$$S_k = a_{(k-1)\,n+1} + a_{(k-1)\,n+2} + \cdots + a_{kn},$$

$$S_{k+1} = a_{kn+1} + a_{kn+2} + \cdots + a_{(k+1)\,n}.$$

Для того чтобы последовательность S_1, S_2, S_3, ... была арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы разность $S_{k+1} - S_k$ не зависела от k. Найдем эту разность. Имеем

$$S_{k+1} - S_k = \left[a_{kn+n} - a_{kn}\right] + \cdots + \left[a_{kn+2} - a_{(k-1)\,n+2}\right] + \left[a_{kn+1} - a_{(k-1)\,n+1}\right].$$

Но поскольку $a_p - a_q = (p-q)d$, то

$$S_{k+1} - S_k = \underbrace{nd + nd + \cdots + nd + nd}_{n \text{ слагаемых}} = n^2 d.$$

Таким образом, последовательность S_1, S_2, S_3, ... является арифметической прогрессией с разностью $n^2 d$.

287. Очевидно, что $x = i$ не удовлетворяет первому из уравнений системы, а $y = i$ не удовлетворяет второму уравнению. Следовательно, данную систему можно переписать в таком виде

$$\begin{cases} 2x^2 = y(1+x^2), \\ 2y^2 = x(1+y^2), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) = y(1+x^2) - x(1+y^2), \\ 2y^2 = x(1+y^2), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-y)(2x+2y+1-xy) = 0, \\ 2y^2 = x(1+y^2). \end{cases}$$

Последняя система распадается на две системы

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 2y^2 = x(1+y^2). \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1 - xy = 0, \\ 2y^2 = x(1+y^2). \end{cases} \tag{2}$$

Решениями системы (1) являются

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = 1.$$

Система (2) перепишется так

$$\begin{cases} x(2-y) = -(2y+1), \\ 2y^2 = x(1+y^2). \end{cases}$$

откуда

$$\frac{2y+1}{y-2} = \frac{2y^2}{1+y^2},$$

так как $y \neq 2$ и $y \neq i$, то $5y^2+2y+1=0$. Отсюда получаем

$$y_3 = \frac{-1+2i}{5}, \quad y_4 = \frac{-1-2i}{5}.$$

Подставим эти значения y в уравнение $2x+2y+1-xy=0$, которое можно переписать так: $x = \dfrac{2y+1}{y-2}$. Получаем

$$x_3 = \frac{-1-2i}{5}, \quad x_4 = \frac{-1+2i}{5}.$$

Отв. $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 1$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm 2i}{5}$, $y_{3,4} = \dfrac{-1 \mp 2i}{5}$.

288. Из условия задачи следует, что

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = a \text{ и } 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = b.$$

Поделив почленно второе из этих равенств на первое, получим $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{b}{a}$. Но так как

$$\cos\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} \text{ и } \sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

то

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \text{ и } \sin(\alpha+\beta) = \frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

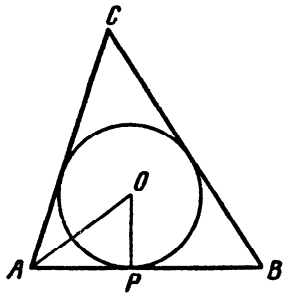

Рис. 53

289. После тождественных преобразований доказываемое неравенство перепишется в виде $2a^3+2b^3+2c^3 \geqslant a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2$, или $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$.

Последнее неравенство верное (см. задачу 263). Равенство достигается при $a=b=c$.

Эту задачу можно решить иначе. Пусть $b+c=2x$, $c+a=2y$, $a+b=2z$, тогда $a+b+c=x+y+z$, $a=y+z-x$, $b=x+z-y$, $c=x+y-z$.

Таким образом,

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}=\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}=$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3 \geqslant 2+2+2-3=3.$$

290. Первое решение. Пусть r — радиус вписанного круга, p — полупериметр треугольника ABC (рис. 53), S — площадь треугольника ABC. Опустим из точки O перпендикуляр OP на сторону AB, тогда

$$OP=r=AO\sin\frac{A}{2},\quad r^2=AO^2\sin^2\frac{A}{2}=AO^2\frac{(p-b)(p-c)}{bc},$$

откуда

$$AO^2=\frac{r^2bc}{(p-b)(p-c)};\quad AO^2\cdot BC=AO^2\cdot a=\frac{abcr^2}{(p-b)(p-c)}. \qquad (1)$$

Аналогично найдем

$$BO^2\cdot AC=\frac{abcr^2}{(p-a)(p-c)}, \qquad (2)$$

$$CO^2\cdot AB=\frac{abcr^2}{(p-a)(p-b)}. \qquad (3)$$

Складывая почленно равенства (1), (2) и (3), получим

$$AO^2\cdot BC+BO^2\cdot AC+CO^2\cdot AB=abcr^2\left[\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(p-a)(p-c)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right]=\frac{abcr^2(p-a+p-b+p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{abcr^2[3p-(a+b+c)]}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abcp^2r^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abcS^2}{S^2}=abc.$$

Второе решение. Из треугольника AOP имеем $AO = \frac{AP}{\cos\frac{A}{2}}$. Но так как $AP = p - a$, то $AO = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$.

Имеем

$$AO^2 \cdot BC = \frac{(p-a)^2}{\cos^2\frac{A}{2}} \cdot a.$$

Поскольку

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}, \text{ то } AO^2 \cdot BC = \frac{abc(p-a)}{p}. \quad (1)$$

Аналогично находим

$$BO^2 \cdot AC = \frac{abc(p-b)}{p}, \quad (2)$$

$$CO^2 \cdot AB = \frac{abc(p-c)}{p}, \quad (3)$$

Сложив почленно равенства (1), (2) и (3), получим

$$AO^2 \cdot BC + BO^2 \cdot AC + CO^2 \cdot AB = \frac{abc}{p}(p - a + p - b + p - c) =$$

$$= \frac{abc}{p} \cdot p = abc.$$

291. Так как m-й член прогрессии $a_m = a_1 + (m-1)d$, а n-й член $a_n = a_1 + (n-1)d$, где a_1 — первый член прогрессии, а d — разность прогрессии, то $a_m - a_n = (m-n)d$. Поэтому, учитывая условие задачи, имеем

$$b - c = (q - r)d,$$
$$c - a = (r - p)d,$$
$$a - b = (p - q)d.$$

Умножив первое равенство на a, второе на b и третье на c, получим

$$ab - ac = (q - r)ad,$$
$$bc - ab = (r - p)bd,$$
$$ac - bc = (p - q)cd.$$

Сложив почленно последние три равенства, находим

$$0 = (q - r)ad + (r - p)bd + (p - q)cd.$$

Поделив обе части этого равенства на d, получим

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0,$$

что и требовалось доказать.

292. Во-первых, заметим, что если числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n составляют геометрическую прогрессию со знаменателем q, то числа $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ составляют также геометрическую прогрессию, но со знаменателем $\frac{1}{q}$. Таким образом, имеем

$$S=\frac{a_n\cdot q-a_1}{q-1} \text{ и } S_1=\frac{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{q}-\frac{1}{a_1}}{\frac{1}{q}-1}=\frac{a_n q-a_1}{q-1}\cdot\frac{1}{a_n\cdot a_1}.$$

Поделив почленно эти равенства, получим

$$\frac{S}{S_1}=a_n\cdot a_1. \tag{1}$$

Но так как произведение двух членов геометрической прогрессии, равноотстоящих от начала и конца, равно произведению крайних членов (также известно, что если число членов нечетно, то квадрат среднего члена равен произведению крайних членов), то

$$(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n)^2=(a_1\cdot a_n)^n. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n)^2=\left(\frac{S}{S_1}\right)^n,$$

откуда $a_1\cdot a_2\cdot a_3\ldots a_n=\left(\frac{S}{S_1}\right)^{\frac{n}{2}}$, что и требовалось доказать.

293. Так как числа x, $x+2y$, $2x+y$ составляют арифметическую прогрессию, то $2(x+2y)=x+(2x+y)$, или

$$x=3y,$$

и поскольку числа $(y+1)^2$, $xy+5$, $(x+1)^2$ составляют геометрическую прогрессию, то $(xy+5)^2=(x+1)^2\cdot(y+1)^2$, или

$$[(x+1)(y+1)]^2-(xy+5)^2=0,$$

или

$$[(x+1)(y+1)-(xy+5)][(x+1)(y+1)+(xy+5)]=0,$$

или

$$(x+y-4)(x+y+2xy+6)=0.$$

Итак, имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} x=3y, \\ x+y-4=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x=3y, \\ x+y+2xy+6=0. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x_1=3$, $y_1=1$, а из второй — получаем $x_2=-1+2i\sqrt{2}$, $y_2=\dfrac{-1+2i\sqrt{2}}{3}$; $x_3=-1-2i\sqrt{2}$, $y_3=\dfrac{-1-2i\sqrt{2}}{3}$.

Отв. $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=-1+2i\sqrt{2}$, $y_2=\dfrac{-1+2i\sqrt{2}}{3}$;

$x_3=-1-2i\sqrt{2}$, $y_3=\dfrac{-1-2i\sqrt{2}}{3}$.

294. Вначале заметим, что уравнение не имеет отрицательных корней, так как сумма отрицательных чисел не может быть равной нулю.

Предположим, что уравнение имеет положительный рациональный корень. Тогда он должен быть целым числом и являться делителем числа 10. Но делителями числа 10 служат лишь числа 1, 2, 5 и 10, которые не удовлетворяют данному уравнению. Итак, данное уравнение не имеет рациональных корней. Но так как данное уравнение нечетной степени, то оно должно иметь хотя бы один действительный корень, а так как мы доказали, что рациональных корней нет, то этот корень иррационален.

295. Данные равенства можно переписать в таком виде

$$\sin\varphi\,(b\cdot\cos\alpha-a\cos\beta)=\cos\varphi\,(b\sin\alpha-a\sin\beta),$$

$$\sin\varphi\,(d\cdot\sin\alpha-c\cdot\sin\beta)=\cos\varphi\,(c\cdot\cos\beta-d\cos\alpha).$$

Поделив почленно первое из этих равенств на второе и приведя полученное равенство к общему знаменателю, находим

$$(b\cdot\cos\alpha-a\cos\beta)(c\cos\beta-d\cos\alpha)=(b\sin\alpha-$$
$$-a\sin\beta)(d\sin\alpha-c\sin\beta).$$

Откуда следует, что

$$bc\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta-a\cdot c\cdot\cos^2\beta-bd\cdot\cos^2\alpha+ad\cos\alpha\cdot\cos\beta=$$
$$=bd\cdot\sin^2\alpha-a\cdot d\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta-b\cdot c\cdot\sin\alpha\sin\beta+ac\cdot\sin^2\beta,$$

или

$$(bc+ad)\cos\alpha\cos\beta+(bc+ad)\sin\alpha\sin\beta=bd+ac,$$
$$(bc+ad)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=bd+ac,$$
$$(bc+ad)\cdot\cos(\alpha-\beta)=bd+ac.$$

Отсюда получаем

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}.$$

296. Данные равенства перепишем в виде

$$\operatorname{tg}x=\frac{m}{a},\quad \sin 2x=\frac{n}{b}.$$

Поскольку $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ и $\operatorname{tg} x = \dfrac{m}{a}$, то $\sin 2x = \dfrac{2am}{a^2+b^2}$.

Таким образом, имеем $\dfrac{2am}{a^2+b^2} = \dfrac{n}{b}$.

297. Так как по условию $ax>0$, то имеем очевидное неравенство $a^2+x^2<(a+x)^2$. Умножая обе части этого неравенства на $a-x$ ($a-x>0$ по условию), получим $(a-x)(a^2+x^2)<(a+x)^2(a-x)$, или $(a-x)(a^2+x^2)<(a^2-x^2)(a+x)$.

Поделив обе части последнего неравенства на положительное произведение $(a^2+x^2)(a+x)$, получим $\dfrac{a-x}{a+x} < \dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$, что и требовалось доказать.

298. Первое решение. Так как $abc>0$, то доказываемое неравенство верно, если верно неравенство

$$a^6+b^6+c^6 \geqslant a^2b^2c^2(ab+ac+bc), \tag{1}$$

или, поделив обе части (1) на $a^2b^2c^2$, получим

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant ab+ac+bc. \tag{2}$$

Имеем очевидные неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}=\left(\frac{a^3}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^3}{ac}\right)^2 \geqslant \\ &\qquad \geqslant 2\cdot\frac{a^3}{bc}\cdot\frac{b^3}{ac}=\frac{2a^2b^2}{c^2}, \\ &\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant 2\cdot\frac{a^2c^2}{b^2}, \\ &\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant 2\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Сложив почленно (3) и сократив на 2, получим

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}. \tag{4}$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2} \geqslant 2\frac{a^2bc}{bc}=2a^2, \\ &\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2} \geqslant 2b^2, \\ &\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2} \geqslant 2c^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Сложив почленно (5) и сократив на 2, получим

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\geqslant a^2+b^2+c^2. \qquad (6)$$

Из (4) и (6) следует, что

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\geqslant a^2+b^2+c^2. \qquad (7)$$

Но так как $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$, то

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\geqslant ab+ac+bc.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (2), а следовательно, и предложенное неравенство.

Второе решение. На основании неравенства $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$, имеем

$$a^8+b^8+c^8\geqslant a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4=(a^2b^2)^2+(a^2c^2)^2+(b^2c^2)^2\geqslant$$
$$\geqslant a^4b^2c^2+a^2b^4c^2+a^2b^2c^4=(a^2bc)^2+(ab^2c)^2+$$
$$+(abc^2)^2\geqslant a^3b^3c^2+a^3b^2c^3+a^2b^3c^3$$

Разделив крайние части последнего неравенства на $a^3b^3c^3$, получим

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

299. Около треугольника ABC (рис. 54) опишем окружность и проведем диаметр DE перпендикулярно AC.

Угол B_1 равен углу B и $A_1C_1=AC$, поэтому если совместим A_1C_1 с AC, то вершина B_1 будет находиться на той же дуге, что и B, если треугольники расположить по одну сторону от AC (A_1C_1), причем расположить вершину B_1 по ту же сторону от DE, что и вершину B. Допустим, что B и B_1 не совпадают. Так как точка D делит дугу AC пополам, то обе биссектрисы BP и B_1P_1 при их продолжении проходят через точку D.

Для определенности пусть дуга DCB больше дуги DCB_1; тогда отрезок DB больше отрезка DB_1 (так как, проведя хорду BB_1, получим $\triangle DBB_1$, в котором $\angle BB_1D>90°$). Отрезок DP меньше, чем DP_1, так как проекция DP на AC меньше проекции DP_1 на AC_1.

Таким образом,

$$BD>B_1D,$$
$$DP<DP_1$$

Вычитая почленно эти неравенства, получим

$$BD-DP>B_1D-DP_1,$$

т. е. $BP>B_1P_1$, что противоречит условию ($BP=B_1P_1$). Следовательно, точка B_1 совпадает с точкой B, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

300. Пусть диагональ AC, вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром (рис. 55). Требуется доказать, что проекции DA_1 и BC_1 сторон AD и BC на диагональ BD равны между собой. Углы

ADB и ACB равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу $AB<$ $<180°$. Следовательно, прямоугольные треугольники AA_1D и ABC подобны. Из их подобия следует, что

$$\frac{A_1D}{AD}=\frac{BC}{AC},$$

откуда

$$A_1D=\frac{AD\cdot BC}{AC}. \qquad (1)$$

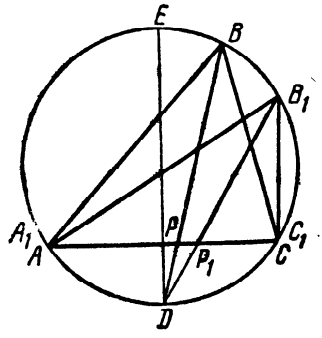

Рис. 54

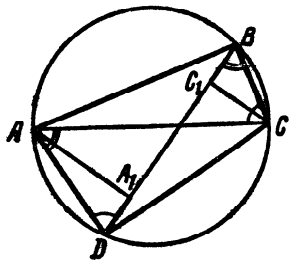

Рис. 55

$\angle CBD=\angle CAD$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу $DC<180°$. Следовательно, прямоугольные треугольники BCC_1 и ACD подобны. Из их подобия следует

$$\frac{BC_1}{BC}=\frac{AD}{AC},$$

откуда

$$BC_1=\frac{AD\cdot BC}{AC}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что $A_1D=BC_1$, что и требовалось доказать.

301. Пусть первый член прогрессии a_1. Имеем

$$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-1},$$

$$S_{2n}=S_n+a_1q^n+a_1q^{n+1}+\cdots+a_1\cdot q^{2n-1}=$$

$$=S_n+q^n(a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1\cdot q^{n-1})=$$

$$=S_n+q^n\cdot S_n,$$

откуда

$$S_{2n}-S_n=q^n\cdot S_n.$$

Аналогично получаем

$$S_{3n} - S_{2n} = q^{2n} \cdot S_n.$$

Из последних двух равенств находим

$$\frac{1}{q^n} = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}},$$

что и требовалось доказать.

302. Имеем $x^4+2x^3+4x^2+2x+1 = (x^4+2x^3+x^2)+2x^2+(x^2+2x+1) = (x^2+x)^2+2x^2+(x+1)^2$.

Таким образом, данное уравнение перепишется в виде

$$(x^2 + x)^2 + 2x^2 + (x + 1)^2 = 0.$$

Поскольку сумма неотрицательных величин может быть равна нулю только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, то в нашем случае должно быть $2x^2=0$ и $(x+1)^2=0$, т. е. одновременно должно иметь место $x=0$ и $x=-1$, что невозможно. Следовательно, данное уравнение не имеет действительных корней.

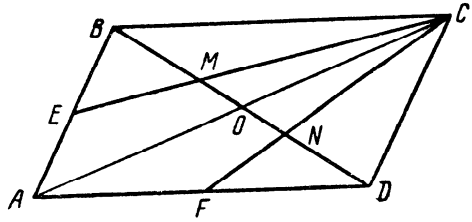

Рис. 56

303. Из первых двух данных равенств получаем

$$x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \cos \alpha \sin \beta + y^2 \sin^2 \beta = a^2, \quad (1)$$

$$x^2 \sin^2 \beta - 2xy \cos \alpha \sin \beta + y^2 \cos^2 \alpha = b^2. \quad (2)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим

$$(x^2 + y^2)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta) = a^2 + b^2. \quad (3)$$

Теперь, складывая почленно равенство (3) и третье из данных равенств, находим

$$(x^2 + y^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Поскольку выражение, стоящее в скобках, равно 2, то имеем $2(x^2+y^2) = (a+b)^2$, что и требовалось доказать.

304. Поскольку $ab>0$, то, умножив обе части доказываемого неравенства на ab, получим неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, или $(a-b)^2 \geqslant 0$, что очевидно. Равенство достигается только при $a=b$.

305. Пусть точки E и F — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей (рис. 56). Также пусть CE пересекает диагональ BD в точке M, CF — в точке N.

Поскольку CE и BO являются медианами в треугольнике ABC, то $BM=\frac{2}{3}OB=\frac{1}{3}BD$, где $OB=\frac{BD}{2}$.

Аналогично, в треугольнике ACD отрезки CF и DO являются медианами, а потому $DN=\frac{BD}{3}$. Следовательно,

$$BM=MN=ND=\frac{BD}{3}.$$

306. Вначале решим задачу в общем виде. Пусть последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ обладает тем свойством, что

$$a_2-a_1=d,\quad a_3-a_2=2d,\quad \cdots,\quad a_n-a_{n-1}=(n-1)d.$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_1+$$
$$+d[1+2+\cdots+(n-1)].$$

Так как $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$, то

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_1+d\cdot\frac{n(n-1)}{2}.$$

Отсюда $a_n=a_1+\frac{n(n-1)}{2}d$. Используя эту формулу, имеем

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\cdot n+\left[\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}\right]d.$$

Методом математической индукции легко убедиться, что

$$\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Таким образом, $S_n=a_1n+\frac{n(n^2-1)}{6}d$.

Для рассматриваемой нами задачи $d=3$, $a_1=1$. Поэтому

$$a_n=1+\frac{3}{2}n(n-1);\qquad S_n=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

307. Да, существует. Например, пусть первый член прогрессии $a_1=2^{n-1}$, где n — натуральное число, а знаменатель прогрессии $q=\frac{1}{2}$. Тогда

$$a_2=2^{n-2},\quad a_3=2^{n-3},\quad \cdots,\quad a_{n-1}=2,\quad a_n=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2},$$

$$a_{n+2}=\frac{1}{2^2}\ ,\ \cdots,\quad a_k=\frac{1}{2^{k-n}}\ ,\ \cdots$$

308. Из всех простых чисел лишь число 2 четное. При $n=2$ данное уравнение имеет вид

$$x^2+x+2=0.$$

Это уравнение не имеет действительных корней, а поэтому и рациональных. Остается исследовать задачу для нечетных значений n. В данном уравнении коэффициент старшего члена равен единице, а остальные коэффициенты — целые числа (1 или n), а потому рациональными корнями его могут быть только целые числа и при этом такие, которые являются делителями свободного члена n. Поскольку n — простое число, то его делителями могут быть лишь числа ± 1 и $\pm n$.

Полагая $f(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+n$, имеем $f(1)=n+n\neq 0$.

$$f(-1)=(-1)^n+(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}+(-1)^{n-3}+\cdots+(-1)^2+$$
$$+(-1)+n=-1+1-1+1-\cdots+(-1)^3+(-1)^2-1+n=n-1\neq 0.$$

$$f(n)=n^n+n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots+n+n\neq 0,$$

$$f(-n)=-n\left(n^{n-1}-n^{n-2}+n^{n-3}-\cdots+n^2-n+1-1\right)=$$
$$=-n^2\left(n^{n-2}-n^{n-3}+n^{n-4}-\cdots+n-1\right)\neq 0,$$

так как все слагаемые в скобках, кроме последнего (-1), делятся на n, а (-1) не делится на n.

Таким образом, доказано, что ни одно из чисел $+1$, -1, n, $-n$ не может служить корнем данного уравнения. Следовательно, данное уравнение не имеет рациональных корней.

309. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни данного уравнения; тогда на основании формул Виета имеем

$$x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=0, \tag{1}$$
$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=b>0. \tag{2}$$

Если предположить, что все три корня действительные, то из равенства (2) следовало бы, что хотя бы один корень положителен. Если бы при этом положительными оказались два корня, то из равенства (2) следовало бы, что и третий корень положителен, а это противоречит равенству (1). Таким образом, если все три корня действительные, то задача доказана. Пусть теперь $x_1=m+ni$ — мнимый корень уравнения, тогда, как известно, уравнение имеет корень сопряженный x_1, а именно $x_2=m-ni$. Поскольку в этом случае $x_1\cdot x_2=(m+ni)(m-ni)=m^2+n^2>0$, то из равенства (2) получаем $x_3=\dfrac{b}{x_1\cdot x_2}>0$. Так что и в этом случае задача доказана. Этим и завершается доказательство утверждения задачи.

310. Данные равенства можно переписать так

$$2\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{y}{a}\ ,\quad 2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{z}{b}\ .$$

После возведения в квадрат обеих частей этих равенств, получим

$$4\cos^2\frac{3x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{y^2}{a^2},\quad 4\sin^2\frac{3x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{z^2}{b^2}.$$

Сложив последние два равенства, получаем

$$4\cos^2\frac{x}{2}=\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}. \tag{1}$$

Далее

$$\frac{y}{a}=2\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\left(4\cos^3\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\cos^2\frac{x}{2}\left(4\cos^2\frac{x}{2}-3\right). \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) находим

$$\frac{2y}{a}=\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-3\right),$$

что и требовалось доказать.

311. Поскольку $2\beta=(\beta+\alpha)+(\beta-\alpha)$, то

$$\cos 2\beta=\cos[(\beta+\alpha)+(\beta-\alpha)]=\cos(\beta+\alpha)\cdot\cos(\beta-\alpha)-$$
$$-\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha). \tag{1}$$

Но так как $\cos(\beta+\alpha)=m$, $\cos(\beta-\alpha)=n$, то

$$\sin(\beta+\alpha)=\pm\sqrt{1-m^2}\text{ и }\sin(\beta-\alpha)=\pm\sqrt{1-n^2}.$$

Теперь равенство (1) можно представить в виде $\cos 2\beta=m\cdot n\pm\pm\sqrt{(1-m^2)\cdot(1-n^2)}$, что и требовалось доказать.

312. Имеем $au+\frac{b}{u}=\left(\sqrt{au}-\sqrt{\frac{b}{u}}\right)^2+2\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{ab}$. Если $a=b=0$, то достигается равенство; если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то знак равенства имеет место лишь при $u=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

313. Имеем $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}=$

$$=\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Так как $au+\frac{b}{u}\geqslant 2\sqrt{ab}$ (см. задачу 312), то

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{\frac{x}{y}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\frac{x}{y}}}}{}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}=$$

$$=2\sqrt[4]{xy}\text{, т. е. }\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt[4]{xy}.$$

Знак равенства имеет место лишь при $x=y$.

314. Через точку P проведем $MN\|AC$, $RS\|BC$, $KL\|AB$ (рис. 57). Полученные треугольники KPS, MPR, NPL являются правильными.

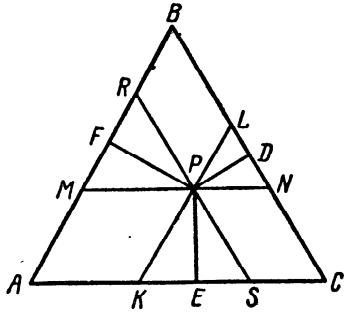

Рис. 57

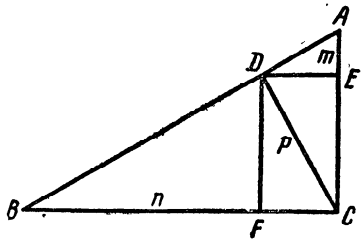

Рис. 58

Из рисунка видно, что $MP=AK$, $PN=SC$. Следовательно, сумма сторон этих треугольников $MP+KS+PN=a$, где через a мы обозначили сторону данного треугольника ABC, а потому и сумма высот этих треугольников равна высоте треугольника ABC, т. е. $PD+PE+PF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ясно, что сумма $BD+CE+AF$ равна сумме сторон треугольников KPS, MPR, NPL, сложенной с суммой половин этих же сторон, т. е. $BD+CE+AF=\frac{3a}{2}$. Таким образом, имеем

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

что и требовалось доказать.

315. 1) Из треугольников ACD и CBD (рис. 58) имеем

$$AD^2=m\cdot AC \text{ и } DB^2=n\cdot CB. \tag{1}$$

Заметим, что

$$AC\cdot CB=CD\cdot AB=p\cdot c, \tag{2}$$

так как эти произведения представляют удвоенную площадь треугольника ABC; кроме того,

$$AD \cdot DB = p^2. \qquad (3)$$

Перемножив почленно оба равенства (1) и учитывая (2) и (3), получим

$$p^3 = m \cdot n \cdot c.$$

2) Из треугольников AED и DFB имеем

$$m^2 = AD^2 - ED^2, \quad n^2 = DB^2 - DF^2.$$

Сложив эти равенства, получим

$$m^2 + n^2 = AD^2 + DB^2 - (ED^2 + DF^2).$$

Но

$$c^2 = AD^2 + DB^2 + 2AD \cdot DB = AD^2 + DB^2 + 2p^2,$$

$$ED^2 + DF^2 = p^2.$$

Следовательно,

$$m^2 + n^2 = c^2 - 2p^2 - p^2 = c^2 - 3p^2,$$

откуда

$$m^2 + n^2 + 3p^2 = c^2.$$

3) Из подобия треугольников AED и ACB имеем

$$\frac{AD}{m} = \frac{c}{AC}.$$

Также имеем

$$AD^2 = m \cdot AC.$$

Из этих двух равенств получаем

$$AD^3 = cm^2, \text{ откуда } AD = \sqrt[3]{cm^2}.$$

Аналогично получаем

$$DB = \sqrt[3]{cn^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{cm^2} + \sqrt[3]{cn^2} = c,$$

или

$$\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{c^2}.$$

316. Так как $2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2$, то прогрессия 2, 1, 0, -1 удовлетворяет условию задачи. Остается доказать, что других таких (действительных) чисел нет. Пусть числа, удовлетворяющие условию, таковы: a, $a-d$, $a-2d$, $a-3d$, где a — наибольшее из них. В силу условия задачи должно иметь место

$$a = (a-d)^2 + (a-2d)^2 + (a-3d)^2,$$

или

$$14d^2 - 12ad + (3a^2 - a) = 0.$$

Чтобы разность d была действительным числом, дискриминант этого уравнения относительно d должен быть неотрицательным, т. е. $36a^2-14(3a^2-a)\geqslant 0$, или $3a^2-7a\leqslant 0$. Решая это неравенство, получаем $0\leqslant a\leqslant \frac{7}{3}$. Но поскольку a должно быть целым числом, то $a=1$ или $a=2$. Проверкой убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет только $a=2$. Итак, утверждение задачи доказано.

317. Известно, что если число α есть корень биквадратного уравнения, то и число $-\alpha$ также является корнем этого уравнения. Пусть x_1 и x_2 два корня данного уравнения, тогда это уравнение имеет также корни $-x_1$ и $-x_2$. Для определенности пусть

$$-x_2 < -x_1 < x_1 < x_2.$$

Поскольку, по условию, корни данного уравнения должны составлять арифметическую прогрессию, то

$$x_2 - x_1 = x_1 + x_1 = x_2 - x_1.$$

Отсюда $x_2=3x_1$. Так как (по теореме Виета) коэффициент при x^2 есть сумма всех парных произведений корней, а свободный член этого уравнения равен произведению всех корней, то имеем

$$3m+5 = x_1^2 + x_2^2 = 10x_1^2 \text{ и } (m+1)^2 = x_1^2 x_2^2 = 9x_1^4.$$

Таким образом, имеем две системы

$$3m+5 = 10x_1^2,\ m+1 = 3x_1^2$$

и

$$3m+5 = 10x_1^2,\ m+1 = -3x_1^2.$$

Из первой системы находим $m=5$, $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=3\sqrt{2}$, а из второй — получаем $m=-\frac{25}{19}$, $x_1=\sqrt{\frac{2}{19}}$, $x_2=3\sqrt{\frac{2}{19}}$.

Итак, если $m=5$, то корни уравнения: $-3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, а если $m=-\frac{25}{19}$, то корни уравнения: $-3\sqrt{\frac{2}{19}}$, $-\sqrt{\frac{2}{19}}$, $\sqrt{\frac{2}{19}}$, $3\sqrt{\frac{2}{19}}$. В обоих случаях корни составляют арифметическую прогрессию.

318. Сложив и вычтя почленно данные равенства, получим

$$x+y = a(\cos t+\sin t)^3, \tag{1}$$

$$x-y = a(\cos t-\sin t)^3. \tag{2}$$

Из равенства (1) находим

$$\cos t+\sin t = \sqrt[3]{\frac{x+y}{a}}, \tag{3}$$

а из равенства (2) получаем

$$\cos t - \sin t = \sqrt[3]{\frac{x-y}{a}}. \qquad (4)$$

Возведя обе части равенств (3) и (4) в квадрат, получаем

$$\cos^2 t + 2\cos t \cdot \sin t + \sin^2 t = \sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{a}\right)^2},$$

$$\cos^2 t - 2\cos t \cdot \sin t + \sin^2 t = \sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{a}\right)^2}.$$

Сложив почленно последние два равенства, получим

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{a}\right)^2} = 2,$$

что и требовалось доказать.

319. Имеем $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} = \dfrac{(a^2+2)+1}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+2}} > 2,$ так как сумма взаимно обратных неравных положительных чисел всегда больше двух.

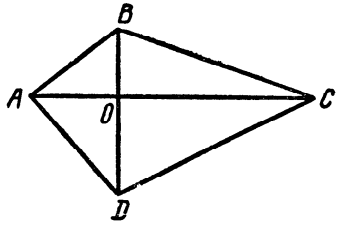

Рис. 59

320. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 59), стороны которого связаны зависимостью $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Требуется доказать, что BD и AC пересекаются (в точке O) под прямым углом.

Предположим, что углы BOC и AOD тупые, а углы AOB и COD острые. Тогда из треугольников ABO и CDO имеем

$$\left.\begin{aligned} AB^2 &< BO^2 + AO^2, \\ CD^2 &< CO^2 + DO^2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

а из треугольников ADO и BCO имеем

$$\left.\begin{aligned} AD^2 &> AO^2 + OD^2, \\ BC^2 &> BO^2 + CO^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из (1) следует, что

$$AB^2 + CD^2 < AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2, \qquad (3)$$

а из (2)

$$AD^2 + BC^2 > AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2. \qquad (4)$$

В неравенствах (3) и (4) правые части равны, поэтому

$$AB^2 + CD^2 < BC^2 + AD^2,$$

что противоречит условию. Итак, прямые AC и BD пересекаются под прямым углом.

321. Очевидно, что $(k+1)$-е нечетное число выражается формулой

$$a_k = 2k + 1. \qquad (1)$$

Найдем число нечетных чисел, меньших первого числа n-й группы. $1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Полагая в формуле (1) $k = \frac{n(n-1)}{2}$, найдем первое нечетное число, входящее в n-ю группу: $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 = n^2 - n + 1$. Таким образом, n-я группа есть арифметическая прогрессия (n^2-n+1), (n^2-n+3), ..., содержащая n членов. Искомая сумма

$$S_n = \frac{2(n^2 - n + 1) + 2(n-1)}{2} \cdot n = n^3,$$

что и требовалось доказать.

322. Общий член первой прогрессии $a_n = 17 + 4(n-1) = 4n + 13$; общий член второй прогрессии $a'_m = 16 + 5(m-1) = 5m + 11$. Ясно, что одинаковыми будут те члены, для которых

$$4n + 13 = 5m + 11, \text{ или } n = m + \frac{m-2}{4}.$$

Для того чтобы n было целым, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{m-2}{4} = k$ было целым числом. Отсюда $m = 4k + 2$, а следовательно, $a'_m = 20k + 21$. Согласно условию задачи, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (p-1)$. Таким образом, искомая сумма есть сумма членов арифметической прогрессии, первый член которой 21, а последний $20(p-1) + 21 = 20p + 1$. Искомая сумма равна $\frac{21 + (20p + 1)}{2} \cdot p = (10p + 11)p$, что и требовалось доказать.

323. Пусть число α — общий корень данных уравнений, тогда имеем два равенства

$$2\alpha^2 - (3a + 2)\alpha + 12 = 0 \text{ и } 4\alpha^2 - (9a - 2)\alpha + 36 = 0. \qquad (1)$$

Из первого равенства находим $a = \frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 12}{3\alpha}$, а из второго получаем $a = \frac{4\alpha^2 + 2\alpha + 36}{9\alpha}$. Таким образом, $2\alpha^2 - 2\alpha + 12 = \frac{4\alpha^2 + 2\alpha + 36}{3}$. Отсюда находим $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 4$. При $\alpha = 0$ равенства (1) не выполняются, а при $\alpha = 4$ имеем $a = \frac{4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 36}{9 \cdot 4} = 3$.

Итак, только при $a=3$ данные уравнения имеют общий корень $(x=i)$.

324. Вначале докажем необходимость условия. Пусть mi — корень данного уравнения. Тогда имеем

$$a\cdot(mi)^3+b\cdot(mi)^2+c\cdot mi+d=0,$$

или

$$-am^3i-bm^2+cmi+d=0,$$

или

$$(d-bm^2)+(cm-am^3)i=0, \text{ поэтому}$$
$$d-bm^2=0,\ cm-am^3=0,$$

так как комплексное число равно нулю лишь тогда, когда действительная и мнимая части равны нулю.

Поскольку $m\neq 0$, то из второго равенства следует, что $c-am^2=0$. Итак, имеем $m^2=\frac{d}{b}$, $m^2=\frac{c}{a}$. Следовательно, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, откуда $ad=bc$. Далее из равенства $c-am^2=0$, или $ac=a^2m^2$ следует, что $ac>0$. Таким образом, необходимость условий $ac>0$ и $ad=bc$ доказана. Теперь докажем достаточность этих условий. Пусть $ad=bc$ и $ac>0$. Умножив обе части данного уравнения на a $(a\neq 0)$, получим $a^2x^3+abx^2+acx+ad=0$, или

$$ax(ax^2+c)+abx^2+ad=0.$$

Заменив ad на bc, последнее равенство приведем к виду

$$ax(ax^2+c)+abx^2+bc=0,$$

или

$$(ax^2+c)(ax+b)=0.$$

Уравнение $ax+b=0$ имеет действительный корень. Корни уравнения $ax^2+c=0$ суть $x=\pm\frac{\sqrt{ac}}{a}\cdot i$. Ясно, что для того, чтобы $\frac{\sqrt{ac}}{a}\cdot i$ было чисто мнимым, достаточно чтобы было $ac>0$. Итак, мы доказали и достаточность условий $ad=bc$ и $ac>0$.

325. Для существования третьего из данных уравнений необходимо, чтобы $\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$. Поэтому первые два уравнения можно преобразовать к виду.

$$(a-1)\operatorname{tg}^2x=1-b, \qquad (1)$$

$$(b-1)\operatorname{tg}^2y=1-a. \qquad (2)$$

Но $a\neq 1$, так как если $a=1$, то из равенства (1) будем иметь $b=1$, что противоречит условию $a\neq b$; аналогично можно показать, что $b\neq 1$. Следовательно, равенство (1) можно почленно разделить на равенство (2). Разделив, получим $\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2$. Убедимся еще в том, что $a\neq 0$. В самом деле, если $a=0$, то из второго уравнения получим, что $\sin y\neq 0$, а из третьего тогда получим, что $b=0$, т. е.

$a=b=0$, что невозможно. В силу последнего замечания можно из третьего уравнения найти $\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}$. Итак, $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2$. Если $\frac{b}{a}=\frac{1-b}{1-a}$, то $a=b$, что невозможно. Если же $\frac{b}{a}=-\frac{1-b}{1-a}$, то $a+b=2ab$, что и требовалось доказать.

326. Умножив обе части первого из данных равенств на $\sin\alpha$, а второго — на $\cos\alpha$, получим

$$1-\sin^2\alpha=m\sin\alpha,\quad 1-\cos^2\alpha=n\cos\alpha.$$

Отсюда

$$m=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},\quad n=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Далее,

$$(mn^2)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}=(\sin^3\alpha)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\alpha;$$

$$(m^2n)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}=(\cos^3\alpha)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\alpha.$$

Следовательно, $(mn^2)^{\frac{2}{3}}+(m^2n)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, что и требовалось доказать.

327. Имеем очевидное неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$. Поскольку $ab<0$, то, поделив обе части этого неравенства на ab, получим $\frac{a^2+b^2}{ab}\leqslant -2$, или $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant -2$.

Равенство достигается лишь при $a=-b$.

328. Доказываемое неравенство верно, если верно $\frac{1+x^4}{x^2}\geqslant 2$, или $\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant 2$, что верно. Знак равенства имеет место только при $x=\pm 1$.

329. Для удобства обозначим угол BAC через α (рис. 60 и рис. 61), а сторону BC — через a. Пусть высоты BK и CD пересекаются в точке O. Имеем

$$\angle BOD=\angle BAC=\alpha$$

как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

В прямоугольном треугольнике CDB

$$BD=BC\cdot\cos\angle CBD. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольнике ODB

$$BO = \frac{BD}{\sin \angle BOD} = \frac{BD}{\sin \alpha}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$BO = \frac{BC \cdot \cos \angle CBD}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \cos \angle CBD}{\sin \alpha}.$$

Известно, что $a = 2R \sin \alpha$, поэтому

$$BO = 2R \cos \angle CBD.$$

Пусть угол $\angle CBD$ равен 60°, тогда

$$BO = 2R \cdot \frac{1}{2} = R.$$

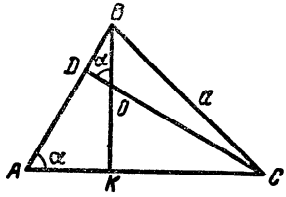

Рис. 60

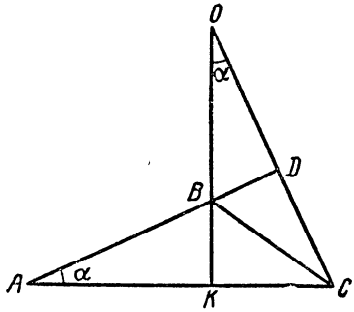

Рис. 61

Если же угол $ABC = 120°$, то

$$\cos \angle CBD = \cos(180° - 120°) = \cos 60° = \frac{1}{2},$$

т. е. и в этом случае $BO = R$.

Итак, мы доказали, что если $\angle ABC$ равен 60° или 120°, то необходимо, чтобы $OB = R$.

Пусть

$$OB = R = \frac{a}{2 \sin \alpha}. \qquad (3)$$

Из прямоугольного треугольника ODB имеем

$$BD = OB \cdot \sin \alpha,$$

или, учитывая (3),

$$BD = \frac{a}{2 \sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{a}{2}.$$

Из треугольника CBD следует, что (рис. 61)

$$BD = a \cdot \cos \angle CBD,$$

или (рис. 60)

$$BD = \alpha \cdot \cos(180° - \angle ABC).$$

Но так как $BD = \frac{a}{2}$, то $\cos\angle CBD = \frac{1}{2}$ и $\cos(180° - \angle ABC) = \frac{1}{2}$, откуда

$$\angle CBD = 60° \text{ и } \angle ABC = 120°.$$

Итак, мы доказали, что если $OB = R$, то это условие достаточно, чтобы угол при вершине B был равен 60 или 120°.

Задачу можно решить чисто геометрически, используя утверждение задачи 180.

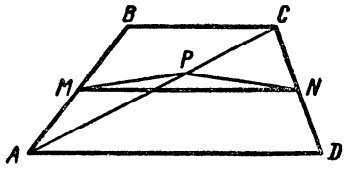

Рис. 62

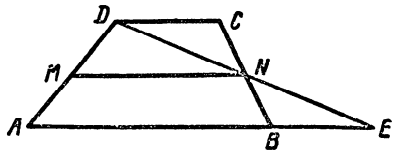

Рис. 63

330. Первое решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD и $MN = \frac{AD + BC}{2}$ (рис. 62).

Положим, что точка P — середина диагонали AC, тогда

$$MP = \frac{BC}{2} \text{ и } NP = \frac{AD}{2},$$

как средние линии в треугольниках ABC и ACD. Складывая почленно последние два равенства, получим

$$MP + NP = \frac{AD + BC}{2}.$$

Но по условию

$$\frac{AD + BC}{2} = MN,$$

поэтому

$$MP + NP = MN.$$

Полученное равенство возможно только в том случае, когда точки M, N и P лежат на одной прямой, так как если бы точка P не лежала на прямой MN, то по свойству стороны треугольника было бы

$$MP + NP > MN.$$

Но по свойству средней линии треугольника $BC \parallel MN$ и $AD \parallel MN$, поэтому $AD \parallel BC$, т. е. четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Второе решение. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AD и BC (рис. 63). Отрезок DN продолжим

на длину NE, равную DN. Соединив точку E с точкой A, получим треугольник ADE, у которого MN — средняя линия, а поэтому

$$MN = \frac{AE}{2}. \tag{1}$$

Далее, соединив точку E с точкой B, получим треугольник NBE, равный треугольнику DCN, так как $DN = NE$ по построению, $CN = NB$ по условию и углы DNC и BNE равны между собой как вертикальные Следовательно, $BE = DC$. Так как по условию

$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

и поско́льку $DC = BE$, то

$$MN = \frac{AD + BE}{2}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) имеем

$$AB + BE = AE.$$

Это равенство возможно только тогда, когда AB и BE лежат на одной прямой. Так как $\angle BEN = \angle CDN$, то $BE \parallel DC$.

Итак, AB параллельно DC и четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

331. Первая группа содержит одно число, вторая группа содержит 3 числа, третья содержит 5 чисел, ... Поскольку последнее число $(n-1)$-й группы равно $(n-1)^2$, то первый член n-й группы равен $(n-1)^2+1 = n^2-2n+2$. Итак, искомая сумма есть сумма членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен n^2-2n+2, последний член n^2, а поэтому число членов $2n-1$. Следовательно,

$$S_n = \frac{(n^2 - 2n + 2) + n^2}{2} \cdot (2n - 1) = (n^2 - n + 1) \cdot (2n - 1) =$$

$$= 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1.$$

332. Поскольку число $3i$ является корнем данного уравнения, то имеем

$$(3i)^5 + 9 \cdot (3i)^3 + 8 \cdot (3i)^2 + k = 0,$$

или

$-72+k=0$, откуда $k=72$. Таким образом, данное уравнение имеет вид

$$x^5 + 9x^3 + 8x^2 + 72 = 0.$$

Так как число $3i$ является корнем уравнения, то и число $-3i$ служит корнем этого уравнения. Поэтому левая часть уравнения должна делиться на произведение $(x-3i)(x+3i) = x^2+9$. Итак, уравнение (1) можно переписать в виде

$$(x^2 + 9)(x^3 + 8) = 0,$$

или

$$(x^2 + 9)(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0;$$

корнями этого уравнения служат числа

$$x_{1,2} = \pm 3i, \quad x_3 = -2; \quad x_{4,5} = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

333. Зная, что $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, имеем $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}$. Приведя правую часть этого равенства к общему знаменателю, после простых преобразований получим

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = \frac{2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)}{1 - [(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2 - 2\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y] + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y}.$$

Откуда, учитывая условия задачи, получаем

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = \frac{2a(1-b)}{1-(a^2-2b)+b^2} = \frac{2a(1-b)}{(1+b)^2-a^2},$$

что и требовалось доказать.

334. Первое решение. Если $a=0$, то имеем верное неравенство: $1>0$. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$2a^3 + a^2 + a + a^2 + 1 > 2a. \qquad (1)$$

Если $a>0$, то, поделив обе части неравенства (1) на a, получим

$$2a^2 + a + 1 + a + \frac{1}{a} > 2.$$

Трехчлен $2a^2+a+1$ положителен, так как его корни мнимые и коэффициент при a^2 положителен, а $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$. Следовательно, неравенство (2) верное, а потому верно и доказываемое неравенство.

Второе решение. Если $0 \leqslant a < 1$, то имеем $2a^3+2a^2>a-1$, что очевидно. Если же $a \geqslant 1$, то $2a^3+2a^2+1>2a^2>a^2 \geqslant a$.

335. Предположим, что треугольник не прямоугольный, т. е. что его ортоцентр не находится в его вершине.

Пусть ортоцентр O находится внутри треугольника* ABC (рис. 64). По условию задачи четырехугольник $EDFO$ вписан в окружность (E, D и F — середины сторон AB, AC и BC). Следовательно,

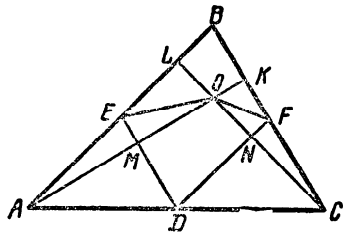

Рис. 64

$$\angle EOF + \angle EDF = 180°. \qquad (1)$$

---

* Если исходить из предположения, что ортоцентр находится вне треугольника, мы придем к такому же выводу, как и в приведенном доказательстве.

Пусть высота AK пересекается с ED в точке M, а высота CL — с DF в точке N.

Так как AK и CL перпендикулярны соответственно BC и AB и поскольку ED и DF параллельны соответственно прямым BC и AB, то $ED \perp AK$, а $DF \perp CL$. Вследствие последнего

$$\angle MON + \angle MDN = 180°. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\angle EOF = \angle MON.$$

Последнее равенство возможно только тогда, когда OF лежит на стороне BC, а OE — на стороне BA, а так как OE и OF имеют общую точку — ортоцентр, то он должен находиться в точке B (общая для AB и BC). И так как только в прямоугольном треугольнике ортоцентр находится в вершине его угла (прямого), то $\angle ABC$ прямой.

336. Пусть отношение

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+kn}} = c, \tag{1}$$

где a_k — k-й член арифметической прогрессии. Обозначим через d разность прогрессии. Интерес представляет лишь тот случай, когда $d \neq 0$, так как при $d = 0$ все члены прогрессии равны между собой и равенство (1) выполняется $\left(\text{отношение } c = \frac{1}{k}\right)$. Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, из равенства (1) получаем

$$\frac{n}{2}[a_1 + a_1 + d(n-1)] = \frac{kn}{2}[a_1 + nd + a_1 + (n + kn - 1)d] \cdot c,$$

откуда после сокращения и перегруппировки членов находим

$$(2a_1 - 2a_1 kc - d + cdk) + n(d - cdk^2 - 2cdk) = 0. \tag{2}$$

Так как равенство (2) имеет место при любом n, то

$$2a_1 - 2a_1 kc - d + cdk = 0 \tag{3}$$

и

$$d(1 - ck^2 - 2ck) = 0. \tag{4}$$

Сократив равенство (4) на $d \neq 0$, будем иметь

$$c = \frac{1}{k(k+2)}. \tag{5}$$

Равенство (3) можно представить в виде

$$(2a_1 - d)(1 - ck) = 0. \tag{6}$$

В силу (5) второй множитель в левой части (6) отличен от нуля, и следовательно, $d = 2a_1$. Таким образом, если имеется такая прогрессия, для которой отношение суммы первых n членов к сумме последующих kn членов не зависит от n, то она может быть только

a, $3a$, $5a$, ... Проверкой убеждаемся, что эта прогрессия именно такая.

337. Имеем $S \cdot 10! = 1 - \frac{10!}{9!\,1!} + \frac{10!}{8!\,2!} - \frac{10!}{7!\,3!} + \frac{10!}{6!\,4!} = C_{10}^{10} - C_{10}^{9} + C_{10}^{8} - C_{10}^{7} + C_{10}^{6}$. Так как $C_m^n = C_m^{m-n}$, то из очевидного равенства

$$C_{10}^{10} - C_{10}^{9} + C_{10}^{8} - C_{10}^{7} + C_{10}^{6} - C_{10}^{5} + C_{10}^{4} - C_{10}^{3} + C_{10}^{2} - C_{10}^{1} + C_{10}^{0} = 0$$

следует, что

$$2\left(C_{10}^{10} - C_{10}^{9} + C_{10}^{8} - C_{10}^{7} + C_{10}^{6}\right) = C_{10}^{5}.$$

Следовательно,

$$S \cdot 10! = \frac{C_{10}^{5}}{2}, \text{ откуда } S = \frac{C_{10}^{5}}{2 \cdot 10!} = \frac{1}{2 \cdot 5!\,5!}.$$

338. Пусть α, β пара чисел, удовлетворяющих данной системе, тогда имеем два равенства

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} = a, \quad \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 - \frac{1}{\alpha^2\beta^2} - 2 = b^2,$$

или

$$[(\alpha^2 + \beta^2) - a]^2 = \alpha^2\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} + 2, \tag{1}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^2\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} + 2 + b^2. \tag{2}$$

Раскрывая в левой части равенства (1) квадратные скобки и вычитая из него равенство (2), получим

$$a^2 - 2a(\alpha^2 + \beta^2) = -b^2.$$

Отсюда

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Поскольку, по условию, a и b действительные числа ($a \neq 0$), то утверждение задачи верно.

339. Предположим, что $a \neq 0$. Тогда имеем

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c+k)}}{2a}.$$

В силу нашего предположения могут быть два случая $a > 0$ и $a < 0$. Рассмотрим их отдельно. Если $a > 0$, то выберем такое значение k, чтобы выполнялось неравенство $k > \frac{b^2}{4a} - c$. При этом условии получаем $b^2 - 4a(c+k) < 0$, т. е. в этом случае исследуемое уравнение

не имеет действительных корней. Пусть теперь $a<0$. Тогда, выбрав $k>-c$, получим $-b+\sqrt{b^2-4a(c+k)}>0$, а следовательно, корень $\frac{-b+\sqrt{b^2-4a(c+k)}}{2a}<0$, что также противоречит условию. Итак, $a=0$. При $a=0$ имеем $x=-\frac{c+k}{b}$ — действительное положительное число, если $b<0$, $c\geqslant 0$.

340. Из условия имеем $(\sin x+\sin y)^2=a^2$ и $(\cos x+\cos y)^2=b^2$, или $\sin^2 x+2\sin x\cdot\sin y+\sin^2 y=a^2$ и $\cos^2 x+2\cos x\cdot\cos y+\cos^2 y=b^2$. Складывая и вычитая почленно эти два уравнения, получим

$$2+2\cos(x-y)=a^2+b^2, \tag{1}$$

$$\cos 2x+\cos 2y+2\cos(x+y)=b^2-a^2. \tag{2}$$

Равенство (2) можно преобразовать к виду

$$2\cos(x+y)[\cos(x-y)+1]=b^2-a^2. \tag{3}$$

Из равенств (1) и (3) легко найдем

$$\cos(x+y)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

341. Перепишем данное равенство в виде

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 2y}{2}+\cos^2 z+2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=1,$$

или

$$\cos 2x+\cos 2y+2\cos^2 z+4\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=0,$$

$$2\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)+2\cos^2 z+4\cos x\cdot\cos y\cos z=0,$$

$$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)+\cos^2 z+\cos z[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=0,$$

$$\cos(x+y)[\cos(x-y)+\cos z]+\cos z[\cos(x-y)+\cos z]=0,$$

$$[\cos(x+y)+\cos z][\cos(x-y)+\cos z]=0,$$

или, наконец,

$$\cos\frac{x+y+z}{2}\cdot\cos\frac{x+y-z}{2}\cdot\cos\frac{x-y+z}{2}\cdot\cos\frac{-x+y+z}{2}=0.$$

Отсюда следует либо $\frac{x+y+z}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, либо $\frac{x+y-z}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, либо $\frac{x-y+z}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, либо $\frac{-x+y+z}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. Из последних четырех равенств вытекает утверждение задачи.

342. Имеем $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)=$

$$=abc\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-2+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-2\right)=$$

$$= abc\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)\right]\geqslant 0,$$

так как сумма двух положительных взаимно обратных чисел больше или равна 2.

343. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\frac{a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)}{(1+a^4)(1+b^4)}\leqslant 1,$$

или $\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{b^2}{1+b^4}\leqslant 1$, что верно, так как $\frac{a^2}{1+a^4}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+a^2}\leqslant\frac{1}{2}$.

Равенство достигается лишь при $|a|=|b|=1$.

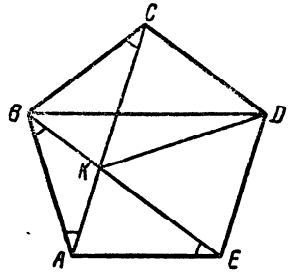

Рис. 65

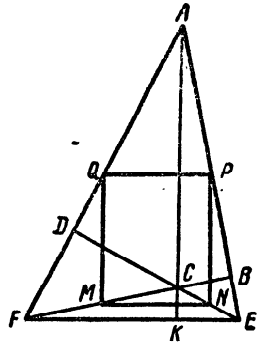

Рис. 66

344. Пусть в пятиугольнике $ABCDE$ (рис. 65) стороны равны между собой и равны последовательные углы A, B и C.

Проведем диагонали AC, BD и BE. Пусть K — точка пересечения диагоналей AC и BE. Треугольники ABE и ABC равны по двум равным сторонам и углу, заключенному между ними. Поэтому диагонали AC и BE равны и равны углы ACB, AEB, ABE и BAC. Отсюда заключаем, что треугольник AKB равнобедренный. Следовательно, $AK=BK$. Поскольку $CK=AC-AK$ и $EK=BE-BK$, то $CK=EK$. Треугольники DKE и DKC равны, так как стороны ED и DC равны по условию, EK и CK — по доказанному, а сторона KD — общая. Из равенства треугольников следует равенство углов KED и KCD, а значит, равны углы E и C пятиугольника $ABCDE$, как суммы равных углов. Таким же образом доказывается равенство углов D и E. Итак, пятиугольник $ABCDE$ правильный.

345. По условию $EA\perp FB$ и $ED\perp FA$ (рис. 66). Пусть C — точка пересечения прямых ED и FB. Проводим прямую ACK, которая пересекает прямую EF в точке K. В треугольнике FAE отрезки ED и FB являются высотами. Следовательно, точка C — ортоцентр треугольника, а поэтому AK — третья высота, т. е. $AK\perp EF$.

В образовавшихся прямоугольных треугольниках FDC, EBC, ADE, ABF точки M, N, P, Q являются соответственно серединами гипотенуз FC, EC, AE, AF. Соединив M с N, N с P, P с Q и Q с M, получим четырехугольник $MNPQ$. Его сторона MN — средняя линия треугольника FCE, поэтому

$$MN = \frac{FE}{2} \text{ и } MN \parallel FE;$$

его сторона PQ — средняя линия треугольника FAE, поэтому

$$PQ = \frac{FE}{2} \text{ и } PQ \parallel FE.$$

Следовательно, $MN = PQ$ и $MN \parallel PQ$, т. е. $MQPN$ — параллелограмм. Так как NP — средняя линия треугольника EAC, то $NP \parallel AC$. Следовательно, $\angle QPN = 90°$, т. е. $MQPN$ — прямоугольник.

346. Имеем $A = \pm 2n + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^4 + \frac{1}{x^4} + \cdots + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} =$

$$= \pm 2n + (x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \cdots + \frac{1}{x^{2n}}\right).$$

Так как

$$x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} \text{ и } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \cdots + \frac{1}{x^{2n}} = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n}(x^2 - 1)},$$

как суммы геометрических прогрессий, то

$$A = \pm 2n + \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n}(x^2 - 1)} = \pm 2n + \frac{(x^{2n+2} + 1)(x^{2n} - 1)}{(x^2 - 1) \cdot x^{2n}},$$

что и требовалось доказать.

347. Перепишем данное уравнение последовательно в виде

$$(x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 + x) - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 + 2 \cdot \frac{x}{2}(x^2 + 1) + \frac{x^2}{4} - \frac{5x^2}{4} = 0,$$

$$\left(x^2 + 1 + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5} \cdot x}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x^2 + 1 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5} \cdot x}{2}\right) \cdot \left(x^2 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{5} \cdot x}{2}\right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения

$$x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1=0,$$

$$x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1=0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$x_{1,2}=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

348. Пусть

$$\frac{1}{k}=\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+y)}{b}=\frac{\cos(x+2y)}{c}=\frac{\cos(x+3y)}{d}.$$

Отсюда имеем $a=k\cdot\cos x$, $b=k\cdot\cos(x+y)$, $c=k\cdot\cos(x+2y)$, $d=k\cdot\cos(x+3y)$. Таким образом, отношение

$$\frac{a+c}{b}=\frac{k[\cos x+\cos(x+2y)]}{k\cdot\cos(x+y)}=\frac{2\cos(x+y)\cdot\cos y}{\cos(x+y)}=2\cos y, \qquad (1)$$

а отношение

$$\frac{b+d}{c}=\frac{k[\cos(x+y)+\cos(x+3y)]}{k\cdot\cos(x+2y)}=$$

$$=\frac{2\cos(x+2y)\cdot\cos y}{\cos(x+2y)}=2\cos y. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение задачи.

349. Первое решение. Из условия $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ получаем

$$b=\frac{2ac}{a+c}. \qquad (1)$$

Учитывая (1), имеем

$$\frac{a+b}{2a-b}=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a(a+c)+2ac}{2a(a+c)-2ac}=\frac{a+3c}{2a}.$$

Итак,

$$\frac{a+b}{2a-b}=\frac{a+3c}{2a}. \qquad (2)$$

Аналогично легко убедиться, что

$$\frac{c+b}{2c-b}=\frac{3a+c}{2c}. \qquad (3)$$

Сложив почленно равенства (2) и (3), получим

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{3a+c}{2c},$$

т. е.

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{2ac+3(a^2+c^2)}{2ac}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant 4,$$

поскольку $ac>0$ (см задачу 304).

Равенство достигается лишь при $a=c=b$.

Второе решение.

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{3a-(2a-b)}{2a-b}+\frac{3c-(2c-b)}{2c-b}=$$

$$=3\left(\frac{a}{2a-b}+\frac{c}{2c-b}\right)-2.$$

Подставляя значение $b=\dfrac{2ac}{a+c}$, получим

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=3\left(\frac{a}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c}{2c-\frac{2ac}{a+c}}\right)-2=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{a+c}{a}+\frac{a+c}{c}\right)-2=\frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+1\geqslant\frac{3}{2}\cdot 2+1=4.$$

350. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 67). $\angle BAD=\alpha$, O_1, O_2, O_3, O_4 — центры квадратов (на рисунке показаны только четверти квадратов). Треугольники BO_1C, AO_2B и т. д. построены так, что каждый из углов, прилежащих к сторонам BC, AB и т. д., равен 45°. Треугольники O_1BO_2 и O_3AO_2 равны, так как $O_1B=O_2A$, $O_2B=O_2A$ и $\angle O_1BO_2=\angle O_3AO_2=90°+\alpha$, где α — острый угол параллелограмма $ABCD$.

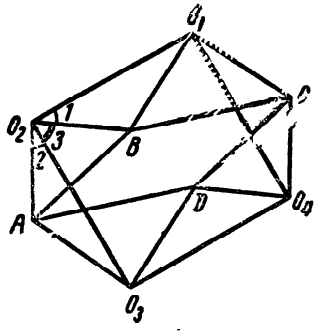

Рис. 67

Следовательно, $O_1O_2=O_2O_3$ и $\angle 1=\angle 2$, а значит, $\angle O_1O_2O_3=\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3=90°$, так как $AO_2\perp O_2B$.

Аналогично можно доказать, что $O_2O_3=O_3O_4=O_4O_1$. Следовательно, $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

351. Левую часть доказываемого равенства перепишем в виде

$$A = \frac{1}{x^n}\left[x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \cdots + (n-1)x + n\right].$$

Пусть

$$S = x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \cdots + (n-1)x + n. \qquad (1)$$

Умножив обе части этого равенства на x^{-1}, получим

$$\frac{S}{x} = x^{n-2} + 2x^{n-3} + 3x^{n-4} + \cdots + (n-1) + nx^{-1}. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из равенства (1) равенство (2), получаем

$$S\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1 - nx^{-1} =$$

$$= \frac{x^n - 1}{x-1} - nx^{-1} = \frac{x^n - 1 - n + nx^{-1}}{x-1} = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x(x-1)}.$$

Таким образом, $S \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x(x-1)}$, откуда

$S = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$. Итак, $A = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$,

что и требовалось доказать.

352. Пусть

$$S = x + 2x^3 + 3x^5 + \cdots + (n-1)x^{2n-3} + nx^{2n-1}. \qquad (1)$$

Умножив обе части этого равенства на x^2, получим

$$x^2 S = x^3 + 2x^5 + 3x^7 + \cdots + (n-1)\cdot x^{2n-1} + nx^{2n+1}. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из равенства (2) равенство (1), получаем

$$\left(x^2 - 1\right)\cdot S = -\left(x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1}\right) + nx^{2n+1}.$$

Имеем $x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} = \frac{x(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1}$, как сумма геометрической прогрессии с первым членом x и знаменателем x^2. Следовательно,

$$\left(x^2 - 1\right)\cdot S = -\frac{x(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + nx^{2n+1} = \frac{x\left[1 - (n+1)x^{2n} + nx^{2n+2}\right]}{x^2 - 1}.$$

Отсюда

$$S = \frac{x\left[1 - (n+1)x^{2n} + nx^{2n+2}\right]}{(1 - x^2)^2}.$$

353. Пусть корни данного уравнения x_1, x_2, x_3, x_4. Так как $x_1 = 1+\sqrt{3}$, то $x_2 = 1-\sqrt{3}$. В силу формул Виета имеем

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -6, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 2. \end{cases}$$

Но так как $x_1+x_2 = 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 2$ и

$$x_1 \cdot x_2 = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = -2,$$

то

$$\begin{cases} -2x_3 - 2x_4 + 2x_3x_4 = -6, \\ x_3 \cdot x_4 = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x_3 = 1+\sqrt{2}$, $x_4 = 1-\sqrt{2}$.

Отв. $1-\sqrt{3}$, $1\pm\sqrt{2}$.

354. Данное уравнение перепишем в виде

$$(1+x+y+z)^2 = 4^2 \cdot \left(\sqrt[4]{xyz}\right)^2.$$

Так как $1+x+y+z>0$, то

$$1+x+y+z = 4\sqrt[4]{xyz}.$$

Известно, что имеет место неравенство

$$\frac{1+x+y+z}{4} \geqslant \sqrt[4]{1 \cdot x \cdot y \cdot z},$$

в котором равенство достигается лишь, когда $1=x=y=z$. Таким образом, данное уравнение имеет единственное решение $x=y=z=$

355. Имеем $\dfrac{\sin^4 x}{a} + \dfrac{\cos^4 x}{b} - \dfrac{1}{a+b} = 0,$

или

$$\frac{(1-\cos^2 x)^2}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} - \frac{1}{a+b} = 0,$$

$$\frac{1-2\cos^2 x + \cos^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} - \frac{1}{a+b} = 0,$$

$$(a+b)\cos^4 x - 2b \cdot \cos^2 x + \frac{b^2}{a+b} = 0.$$

Отсюда

$$\cos^2 x = \frac{b}{a+b}, \text{ а } \sin^2 x = \frac{a}{a+b}.$$

Следовательно,

$$\cos^8 x = \frac{b^4}{(a+b)^4}, \quad \sin^8 x = \frac{a^4}{(a+b)^4}.$$

Итак,

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{a^4}{a^3(a+b)^4}+\frac{b^4}{b^3(a+b)^4}=$$

$$=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3},$$

что и требовалось доказать.

356. Имеем $\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg}a=\dfrac{\sin b}{\cos(a+b)\cos a}=$

$=\dfrac{2\sin b}{\cos(2a+b)+\cos b}=\dfrac{2\sin b}{1+\cos b}$ так как, по условию, $\cos(2a+b)=1$.
Далее

$$[\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg}a]^2+4=4\cdot\left(\frac{\sin b}{1+\cos b}\right)^2+4=$$

$$=4\left(\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}+1\right)=4\sec^2\frac{b}{2}.$$

357. Если $a=b$, то имеет место равенство. Если $a>b$, то $a-b>0$, и данное неравенство перепишется в виде $a>b$. Следовательно, в этом случае неравенство верно. Наконец, если $a<b$, то $a-b<0$, и данное неравенство перепишется в виде $a<b$. Таким образом, и в этом случае доказываемое неравенство верно. Впрочем, перенеся все члены неравенства в левую часть, перепишем доказываемое неравенство в виде $(a-b)^2\geqslant 0$, что очевидно. Равенство достигается лишь при $a=b$.

358. Прибавив к обеим частям данного неравенства $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{c}{d}$ по k, получим $\dfrac{a}{b}+k\leqslant\dfrac{c}{d}+k$, или $\dfrac{a+bk}{b}\leqslant\dfrac{c+dk}{d}$. Равенство достигается только при $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

359. Известно, что если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный (обратная теорема Пифагора). Таким образом, если мы убедимся, что имеет место равенство $(a+b)^2+h^2=(c+h)^2$, то этим утверждение задачи будет доказано. Написанное равенство можно представить в виде

$$a^2+2ab+b^2+h^2=c^2+2ch+h^2. \qquad (1)$$

Так как, по условию, $a^2+b^2=c^2$, то из равенства (1) следует, что $ab=ch$. Это равенство верно, поскольку как ab, так и ch выражают удвоенную площадь прямоугольного треугольника.

360. Известно, что площадь треугольника $S=\dfrac{abc}{4R}$ или $S=pr$, где p — полупериметр треугольника. Из этих равенств следует, что $\dfrac{abc}{4R}=pr$, или $Rr=\dfrac{abc}{4p}$, или $Rr=\dfrac{abc}{2(a+b+c)}$. Но так как

a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то $a+c=2b$. Следовательно, в нашей задаче $Rr=\dfrac{abc}{2(b+2b)}=\dfrac{ac}{6}$, откуда $ac=6Rr$.

361. Вначале заметим, что

$$k\cdot k!=(k+1-1)\cdot k!=(k+1)\cdot k!-k!=(k+1)!-k!$$

Таким образом, имеем n равенств

$$\begin{aligned}
1\cdot 1! &= 2!-1\\
2\cdot 2! &= 3!-2!\\
3\cdot 3! &= 4!-3!\\
&\cdots\cdots\cdots\\
n\cdot n! &= (n+1)!-n!
\end{aligned}$$

Сложив почленно эти n равенств, получим

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1,$$

что и требовалось доказать.

362. Данное уравнение перепишем последовательно так

$$\begin{aligned}
&2^x+2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{\frac{x}{2}}+5^x=4\cdot 5^x,\\
&\left(2^{\frac{x}{2}}+5^{\frac{x}{2}}\right)^2=4\cdot\left(5^{\frac{x}{2}}\right)^2,\\
&2^{\frac{x}{2}}+5^{\frac{x}{2}}=2\cdot 5^{\frac{x}{2}},\\
&2^{\frac{x}{2}}=5^{\frac{x}{2}},\\
&\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}}=1,\ \text{откуда}\ x=0.
\end{aligned}$$

363. Поскольку рассматриваемая сумма обращается в нуль при $x=0$ и при $x=x_1$, $(x_1\neq k\pi)$, то имеем два равенства

$$a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\cdots+a_n\cos\alpha_n=0 \qquad (1)$$

и

$$a_1\cos(\alpha_1+x_1)+a_2\cos(\alpha_2+x_1)+\cdots+a_n\cos(\alpha_n+x_1)=0.$$

Второе равенство можно представить в виде

$$(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\cdots+a_n\cos\alpha_n)\cos x_1-(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\cdots+a_n\sin\alpha_n)\sin x_1=0.$$

Учитывая равенство (1) и неравенство $\sin x_1\neq 0$ (так как $x_1\neq k\pi$), имеем

$$a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\cdots+a_n\sin\alpha_n=0, \qquad (2)$$

Пусть теперь x — произвольное число. Имеем

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+a_2\cos(\alpha_2+x)+\cdots+a_n\cos(\alpha_n+x)=$$
$$=(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\cdots+a_n\cos\alpha_n)\cdot\cos x-$$
$$-(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\cdots+a_n\sin\alpha_n)\cdot\sin x=0,$$

так как имеют место равенства (1) и (2)

364. Имеем $x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2$, $x^2+z^2\geqslant 2xz$, $x^2+1\geqslant 2x$. Сложив почленно эти три неравенства, получим $x^4+y^4+2x^2+z^2+1\geqslant 2x(xy^2++z+1)$, или $x^4+y^4+z^2+1\geqslant 2x(xy^2-x+z+1)$. Равенство достигается только при: 1) $x=y=z=1$; 2) $x=z=1$, $y=-1$. Впрочем, рассматривая разность обеих частей неравенства, получим $x^4+y^4+z^2++1-2x^2y^2+2x^2-2xz-2x=(x^4-2x^2y^2+y^4)+(z^2-2xz+x^2)+(x^2--2x+1)=(x^2-y^2)^2+(z-x)^2+(x-1)^2\geqslant 0$. Следовательно,

$$x^4+y^4+z^2+1\geqslant 2x(xy^2-x+z+1).$$

365. Если треугольник прямоугольный $\left(A=\frac{\pi}{2}\right)$, то $B+C=\frac{\pi}{2}$, поэтому имеем $\cos A+\cos B=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sin C$, т. е. необходимость условия доказана.

Теперь пусть дан треугольник, для которого выполняется зависимость $\cos A+\cos B-\sin C=0$, или $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin C=0$. Но так как $A+B+C=\pi$, т. е. $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, то $\cos\frac{A+B}{2}=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$. Поэтому $2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}-$ $-2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=0$, или $\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)=0$. Так как $\sin\frac{C}{2}\neq 0$ (C — угол треугольника), то $\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}$. Отсюда $A-B=C$ или $B-A=C$. Учитывая, что $A+B+C=\pi$, заключаем, что либо $A=\frac{\pi}{2}$, либо $B=\frac{\pi}{2}$, т. е. треугольник прямоугольный. Этим мы доказали достаточность условия.

366. Обозначим разность искомой прогрессии через d. Имеем

$$b^2=x_1^2+(x_1+d)^2+(x_1+2d)^2+\cdots+[x_1+(n-1)d]^2,$$

или

$$b^2=nx_1^2+2x_1d[1+2+3+\cdots+(n-1)]+$$
$$+d^2[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2].$$

Но так как $1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ и $1^2+2^2+3^2+\ldots+$ $+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, то имеем

$$b^2 = nx_1^2 + n(n-1)x_1 d + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} d^2. \qquad (1)$$

Далее

$$a = x_1 + (x_1 + d) + (x_1 + 2d) + \cdots + [x_1 + d(n-1)] =$$
$$= nx_1 + \frac{n(n-1)}{2} d. \qquad (2)$$

Исключая из равенств (1) и (2), число x_1, получим

$$d^2 \cdot \frac{n(n^2-1)}{12} = \frac{nb^2 - a^2}{n},$$

откуда

$$d = \pm \sqrt{\frac{12(nb^2 - a^2)}{n^2(n^2-1)}}.$$

Теперь легко найти x_1. Для обоих значений d находится единственное значение x_1

$$x_1 = \frac{1}{n}\left[a - \frac{n(n-1)}{2} d\right].$$

Итак, поскольку по условию $nb^2 - a^2 \neq 0$, задача имеет два решения.

367. Согласно условию задачи, имеем $|q| < 1$ и

$$q^n = k(q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots) = k \cdot q^{n+1} \cdot \frac{1}{1-q}. \qquad (1)$$

Отсюда находим $1 - q = kq$ и, следовательно, если задача имеет решение, то

$$q = \frac{1}{k+1}. \qquad (2)$$

Если же, наоборот, из равенства (2) следует, что $|q| < 1$, то равенство (2) влечет за собой равенство (1), и соответствующая прогрессия удовлетворяет условию задачи. Таким образом, задача разрешима при любом k, удовлетворяющем неравенству $\left|\frac{1}{k+1}\right| < 1$, т. е. задача разрешима при $k > 0$ или $k < -2$.

368. Данное уравнение перепишем в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + (3^x)^2 = 4 \cdot (3^x)^2,$$

или

$$(2^x + 3^x)^2 = (2 \cdot 3^x)^2.$$

Отсюда $2^x + 3^x = 2 \cdot 3^x$, или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$. Следовательно, $x = 0$.

369. Поделим обе части данного уравнения на $2^x (2^x \neq 0)$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Поскольку $0 < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < 1$; $0 < \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < 1$ и $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 1$, то найдется такое α, что $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Таким образом, данное уравнение принимает вид $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

Очевидно, что при $x=2$ последнее уравнение, а следовательно, и данное выполняются. Остается доказать, что, кроме $x=2$, уравнение не имеет решений. Действительно, пусть $x<2$, тогда, учитывая, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ — правильные положительные дроби, имеем $(\cos\alpha)^x > \cos^2\alpha$ и $(\sin\alpha)^x > \sin^2\alpha$, а потому $(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x > \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Следовательно, среди чисел, меньших двух, нет таких, которые удовлетворяли бы данному уравнению. Пусть теперь $x>2$. В этом случае, учитывая, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ правильные положительные дроби, имеем $(\cos\alpha)^x < \cos^2\alpha$, $(\sin\alpha)^x < \sin^2\alpha$, а поэтому

$$(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x < 1.$$

Следовательно, и среди чисел, больших двух, также нет таких, которые удовлетворяли бы данному уравнению. Итак, данное уравнение имеет единственное решение $x=2$.

370. Равенство $\operatorname{tg}\alpha = B \cdot \operatorname{tg}\beta$ перепишем в виде

$$B \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta,$$

но так как $\sin\alpha = A\sin\beta$, то имеем

$$B \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta = A \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta,$$

или

$$\sin\beta\,(A \cdot \cos\beta - B \cdot \cos\alpha) = 0.$$

Так как, согласно условию $\sin\beta \neq 0$, то

$$A \cdot \cos\beta - B \cdot \cos\alpha = 0.$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} \sin\alpha = A \cdot \sin\beta, \\ A \cdot \cos\beta = B \cdot \cos\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Возведя каждое из равенств (1) в квадрат и произведя замену $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ и $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$, получим

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + A^2 \cdot \sin^2\beta = 1, \\ B^2 \cdot \cos^2\alpha + A^2 \cdot \sin^2\beta = A^2. \end{cases} \tag{2}$$

Наконец, учитывая, что $A \neq 0$, $B \neq \pm 1$, находим

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}}\,,\quad \sin\beta = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{A^2-B^2}{1-B^2}}\,.$$

371. Имеем $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{D}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\right.$
$\left.+\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}+\cos\frac{C+D}{2}\right)$.

Так как $A+B+C+D=2\pi$, то $\frac{A+B}{2}=\pi-\frac{C+D}{2}$, $\cos\frac{A+B}{2}=$
$=-\cos\frac{C+D}{2}$, а потому

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{D}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{A-B+C-D}{4}\cos\frac{A-B-C+D}{4}=$$
$$=\cos\frac{A+C-(B+D)}{4}\cos\frac{A+D-(B+C)}{4}=$$
$$=\cos\frac{A+C-(2\pi-A-C)}{4}\cos\frac{A+D-(2\pi-A-D)}{4}=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+D}{2}\right)=\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+D}{2}\,.$$

372. Первое решение. Пусть $x=\frac{1}{3}+\alpha$, $y=\frac{1}{3}+\beta$, $z=$
$=\frac{1}{3}+\gamma$, тогда $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{3}+\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\beta\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\gamma\right)^2=$
$=3\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Но так как $\alpha+\beta+\gamma=0$, то $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, откуда

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}\,.$$

Равенство достигается лишь при $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Второе решение. Имеем $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$, откуда
$3(x^2+y^2+z^2)\geqslant x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2$.
Но так как, по условию, $x+y+z=1$, то

$$3(x^2+y^2+z^2)\geqslant 1,\text{ или }x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}\,.$$

373. Имеем $2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz) = (x-y)^2+(z-x)^2+(y-z)^2 \geqslant 0$.

Так как $xy+xz+yz=1$, то $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$.

374. Проведем высоту треугольника. Из одного из образовавшихся прямоугольных треугольников находим $\sin 10° = \frac{a}{2b}$. Далее из равенства $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ получаем (при $\alpha = 10°$) $\sin 30° = 3\sin 10° - 4\sin^3 10°$. Следовательно, $\frac{1}{2} = \frac{3a}{2b} - \frac{a^3}{2b^3}$, или $b^3 = 3ab^2 - a^3$, поэтому

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

375. Пусть точки M, N, P, Q соответственно середины сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника $ABCD$. В четырехугольнике $MNPQ$ сторона MN равна половине AC и параллельна AC; сторона PQ равна половине AC и параллельна AC. Следовательно, четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм. Далее, поскольку, по условию, диагонали параллелограмма $MNPQ$ равны, то $MNPQ$ — прямоугольник, т. е. MN и MQ, а вместе с ними AC и BD перпендикулярны.

376. Обозначим сумму членов геометрической прогрессии через S_n, а искомую сумму через S_1. Пусть члены прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, а знаменатель прогрессии q. Имеем

$$S_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{1}{a_1}\cdot\frac{1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}}{q^{n-1}} =$$

$$= \frac{a_1\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)}{a_1 \cdot a_1 q^{n-1}} = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n},$$

что и требовалось доказать.

377. Легко заметить, что числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ — взаимно обратные, а потому если обозначить $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x$ через z, то $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{z}$. Таким образом, имеем

$$z + \frac{1}{z} = 6,$$

или

$$z^2 - 6z + 1 = 0,$$

откуда

$$z = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Итак, имеем два уравнения

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3+2\sqrt{2} \text{ и } \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}},$$

или

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^1 \text{ и } \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(3+2\sqrt{2}\right)$$

Теперь ясно, что уравнение имеет два и только два решения:

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = -2.$$

378. Перепишем данные равенства в виде

$$\cos(\alpha - 3\varphi) = m\cos^3\varphi,$$
$$\sin(\alpha - 3\varphi) = m\sin^3\varphi,$$

или

$$\cos 3\varphi \cdot \cos(\alpha - 3\varphi) = m\cos 3\varphi \cdot \cos^3\varphi,$$
$$\sin 3\varphi \cdot \sin(\alpha - 3\varphi) = m\sin 3\varphi \cdot \sin^3\varphi.$$

Вычтя из равенства (3) равенство (4), получим

$$\cos 3\varphi \cdot \cos(\alpha - 3\varphi) - \sin 3\varphi \cdot \sin(\alpha - 3\varphi) = m(\cos^3\varphi \cos 3\varphi - \sin^3\varphi \sin 3\varphi),$$

или

$$\cos\alpha = m(\cos^3\varphi \cdot \cos 3\varphi - \sin^3\varphi \cdot \sin 3\varphi).$$

Подставляя в последнее равенство значения

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \text{ и } \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

получим

$$\cos\alpha = m[\cos^3\varphi(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) - \sin^3\varphi(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

или

$$\cos\alpha = -3m(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) + 4m(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi).$$

Теперь возведем равенства (1) и (2) в квадрат

$$\cos^2(\alpha - 3\varphi) = m^2\cos^6\varphi, \quad \sin^2(\alpha - 3\varphi) = m^2\sin^6\varphi.$$

Сложив эти два равенства, находим

$$\cos^6\varphi + \sin^6\varphi = \frac{1}{m^2},$$

или

$$\cos^4\varphi - \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi + \sin^4\varphi = \frac{1}{m^2}.$$

Далее,

$$\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2-2\cos^2\varphi\sin^2\varphi=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4\varphi}{4} \text{ и } \sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi=\frac{1}{8}(1-\cos 4\varphi).$$

Таким образом, равенства (5) и (6) можно переписать в следующем виде

$$\cos\alpha=\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\cos 4\varphi\right)\cdot m+\frac{4}{m} \qquad (7)$$

и

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\varphi=\frac{1}{m^2}.$$

Отсюда

$$\cos 4\varphi=\frac{8}{3m^2}-\frac{5}{3}. \qquad (8)$$

Из равенств (8) и (7) получаем

$$\cos\alpha=\frac{2-m^2}{m},$$

что и требовалось доказать.

379. Перепишем доказываемые неравенства в виде

$$\frac{(a-b)(a-b)}{8a}<\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}<\frac{(a-b)(a-b)}{8b},$$

или

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a}<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<$$

$$<\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}.$$

Поскольку $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$, то, поделив все члены неравенств на $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, мы получим $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a}<1<\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}$.

Так как все члены этих неравенств положительны, то, извлекая из них квадратный корень, получаем $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$

или

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)<1<\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right). \qquad (1)$$

Так как, по условию $a>b>0$, то $\frac{b}{a}<1$, $\frac{a}{b}>1$ и, следовательно, $1+\sqrt{\frac{b}{a}}<2$ и $1+\sqrt{\frac{a}{b}}>2$. В силу последних соотношений неравенства (1) верны, поэтому верно и доказываемое неравенство.

380. Так как отрезки, упомянутые в условии задачи, являются хордами окружности и поскольку они равны между собой, то они равноудалены от центра окружности. Следовательно, из центра данной окружности можно провести другую окружность, касающуюся всех равных отрезков. Ясно, что эта окружность является вписанной в данный четырехугольник, а потому суммы противоположных сторон четырехугольника равны между собой.

381. Пусть первый член прогрессии a_1, а знаменатель q. Сумма первых $2n+1$ членов этой прогрессии

$$S=\frac{a_1\left(q^{2n+1}-1\right)}{q-1}.$$

Квадраты членов рассматриваемой геометрической прогрессии также составляют геометрическую прогрессию, первый член которой a_1^2, а знаменатель q^2. Поэтому сумма первых $(2n+1)$ членов этой прогрессии

$$S_1=\frac{a_1^2\left(q^{2(2n+1)}-1\right)}{q^2-1}. \qquad (2)$$

Поделив почленно равенство (2) на (1), получим

$$\frac{S_1}{S}=\frac{a_1\left(q^{2(2n+1)}-1\right)(q-1)}{\left(q^2-1\right)\left(q^{2n+1}-1\right)}=\frac{a_1\left(q^{2n+1}+1\right)}{q+1}=$$
$$=a_1\left(q^{2n}-q^{2n-1}+\cdots+1\right).$$

что и требовалось доказать.

382. Обычным умножением $(1+x+2x^2+\ldots+nx^n)$ на $(1+x+2x^2+\ldots+nx^n)$ обнаруживаем, что коэффициент при x^n равен

$$a_n=n\cdot 1+(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+(n-3)\cdot 3+\cdots+[n-$$
$$-(n-1)](n-1)+1\cdot n=2n+n[1+2+3+\cdots+(n-1)]-$$
$$-[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2].$$

Так как $1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$, а $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)(2n-1)n}{6}$, то

$$a_n=2n+\frac{n^2(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(2n-1)n}{6}=\frac{n(n^2+11)}{6}.$$

383. Поскольку $25^x \neq 0$, то, поделив обе части данного уравнения на 25^x, получим уравнение, равносильное ему

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x + \left(\frac{10}{25}\right)^x - 1 = 0,$$

или

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Так как $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$, то имеем лишь одно уравнение

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

или

$$x \cdot \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5} = \log_{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ т.е. } x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

384. Введем обозначение $2^x = z$, $(z > 0)$. В силу этого данное уравнение перепишется в виде

$$z^2 - 4mz + 2m + 2 = 0. \qquad (1)$$

Для того чтобы корни были действительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения (1) был неотрицателен, т. е.

$$4m^2 - 2m - 2 \geqslant 0, \text{ или } (m-1)\left(m + \frac{1}{2}\right) \geqslant 0,$$

следовательно, либо $m \leqslant -\frac{1}{2}$, либо $m \geqslant 1$. Но так как, по условию, $m < 0$, то имеем лишь $m \leqslant -\frac{1}{2}$.

Если $m < -1$, то $2m + 2 < 0$, а следовательно, корни уравнения (1) разных знаков. Но поскольку $z = 2^x > 0$, то берем только положительный корень

$$z = 2^x = 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2}.$$

Отсюда

$$x = \log_2 \left(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2}\right).$$

Теперь докажем, что при остальных возможных значениях m данное уравнение не имеет решений.

Если $m=-1$, то данное уравнение принимает вид

$$z^2+4z=0.$$

Корнями этого уравнения служат числа 0 и -4. Но так как должно быть $z>0$, то при $m=-1$ уравнение (1) не имеет решений.

Если $-1<m<-\frac{1}{2}$, то корни уравнения (1) действительны и различны и так как $z_1\cdot z_2=2m+2>0$ и $z_1+z_2=4m<0$, то z_1 и z_2 отрицательны. Таким образом, при $-1<m<-\frac{1}{2}$ уравнение (1) не имеет решений.

Наконец, если $m=-\frac{1}{2}$, то уравнение (1) принимает вид $z^2+2z+1=0$, или $(z+1)^2=0$, откуда $z=-1$. Но так как должно быть $z>0$, то и в данном случае уравнение (1), а вместе с ним и решаемое, не имеет решений.

Отв. Уравнение имеет решение только тогда, когда $m<-1$, причем единственное:

$$x=\log_2\left(2m+\sqrt{4m^2-2m-2}\right).$$

385. Из условия следует, что $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq\pm 1$, т. е. $x\neq k\pi$. Имеем

$$\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}}=\frac{1}{\sin x}\cdot\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sin x\cdot|\sin x|}.$$

Таким образом, исследуемое выражение перепишется в виде

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin x\cdot|\sin x|}-1\right).$$

Поскольку $\sin x>0$, если $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, то в этом случае $|\sin x|=\sin x$, а потому

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin x\cdot|\sin x|}-1\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)=\sqrt{2}\cdot\operatorname{ctg}^2 x.$$

Если же $(2k+1)\pi<x<2(k+1)\pi$, то $|\sin x|=-\sin x$ и, следовательно,

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin x|\sin x|}-1\right)=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)=$$

$$=-\sqrt{2}\cdot(\operatorname{ctg}^2 x+2).$$

Итак, утверждение задачи верно.

386. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg}A}=\frac{\sin(A+B)\cdot\cos A}{\cos(A+B)\cdot\sin A}=\frac{\sin(2A+B)+\sin B}{\sin(2A+B)-\sin B}.$$

Но так как, по условию, $\sin(2A+B)=\frac{q}{p}\sin B$, то

$$\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg}A}=\frac{\frac{q}{p}\sin B+\sin B}{\frac{q}{p}\sin B-\sin B}=\frac{\frac{q}{p}+1}{\frac{q}{p}-1}=\frac{q+p}{q-p},$$

откуда

$$(q-p)\cdot\operatorname{tg}(A+B)=(q+p)\cdot\operatorname{tg}A.$$

387. Доказываемое неравенство верно, если $(a^3+b^3+c^3)(ab+bc+ac)\geqslant abc(a+b+c)^2$, или $a(b^2-c^2)^2+b(c^2-a^2)^2+c(a^2-b^2)^2\geqslant 0$, что очевидно, так как $a>0$, $b>0$, $c>0$. Знак равенства имеет место лишь при $a=b=c$.

388. Доказываемое неравенство верно, если $\sqrt{2ab-b^2}\geqslant a-\sqrt{a^2-b^2}$. Поскольку $a-\sqrt{a^2-b^2}\geqslant 0$ и $\sqrt{2ab-b^2}\geqslant 0$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим неравенство $2ab-b^2\geqslant 2a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}$, или $\sqrt{a^2-b^2}\geqslant a-b$. Так как $\sqrt{a^2-b^2}>0$, $a-b>0$, то получаем $a^2-b^2\geqslant(a-b)^2$, или $a+b\geqslant a-b$, что очевидно. Равенство имеет место лишь при $b=0$.

389. Если $n=2$, то треугольник прямоугольный (обратная теорема Пифагора). Данное условие можно переписать в виде

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n=1.$$

Так как $b<a$, $c<a$, то $\left(\frac{b}{a}\right)^n<\left(\frac{b}{a}\right)^2$, $\left(\frac{c}{a}\right)^n<\left(\frac{c}{a}\right)^2$, если $n>2$.

Таким образом, при $n>2$ имеем $1=\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n<\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2$.

Отсюда $a^2<b^2+c^2$, т. е. квадрат наибольшей стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон; следовательно, в силу обратной теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого угла треугольника, заключаем, что треугольник остроугольный (при $n>2$). Наконец, если $n<2$, то имеем

$$1=\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n>\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2.\ \text{Отсюда } a^2>b^2+c^2.$$

Следовательно, на основании обратной теоремы о квадрате стороны, лежащей против тупого угла треугольника, заключаем, что треугольник тупоугольный (при $n<2$).

390. Известно, что площадь треугольника равна $p\cdot r$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$ или $\frac{a\cdot h_a}{2}$. Следовательно, $p\cdot r=\frac{a\cdot h_a}{2}$, откуда

$$h_a=\frac{2pr}{a}=2r\,\frac{a+b+c}{2a}=r\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right).$$

Аналогично

$$h_b = r\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right)$$

и

$$h_c = r\left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right).$$

Сложив почленно последние три равенства, получим

$$h_a + h_b + h_c = r\left(3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

Согласно условию задачи должно быть

$$3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = 9,$$

или

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = 6. \qquad (1)$$

Выражения, стоящие в скобках в равенстве (1), суть суммы взаимно обратных положительных величин. Известно, что сумма взаимно обратных положительных величин не меньше двух, т. е. $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geqslant 2$. Знак равенства имеет место только при $m = n$.

Таким образом, левая часть равенства (1) может быть равна шести только при $a = b = c$, т. е. когда треугольник равносторонний.

391. Имеем

$$Sx = nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + (n-3)x^4 + \cdots + 2x^{n-1} + x^n.$$

Следовательно,

$$S(1-x) = n - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^{n-1} - x^n = n -$$

$$- x\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}\right) = n - x\frac{1-x^n}{1-x} =$$

$$= \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{1-x}.$$

Отсюда

$$S = \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

392. Нам надо доказать, что $f(-x) = -f(x)$, т. е. что $f(x) + f(-x) = 0$. Имеем $f(x) + f(-x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2}) + \lg(-x + \sqrt{1+x^2}) = \lg[(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2] = \lg 1 = 0$, что и требовалось доказать.

393. Имеем $(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)^2=a^2$, или $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+2\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 x=a^2$. Но так как $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=b$ и $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$, то $b+2=a^2$, откуда $a^2-b=2$.

394. Имеем

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}=\sqrt{ab+bc+ad+cd+2\sqrt{abcd}-2\sqrt{abcd}}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2+(\sqrt{bc}-\sqrt{ad})^2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Равенство достигается лишь при $bc=ad$.

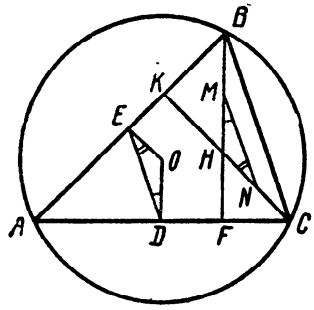

Рис. 68

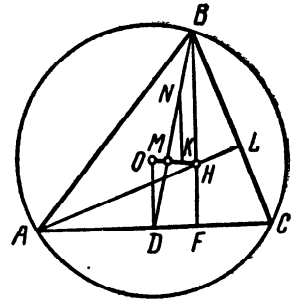

Рис. 69

395. Предварительно докажем, что в любом треугольнике расстояние от центра описанного круга до стороны вдвое меньше расстояния от противоположной (этой стороне) вершины до ортоцентра.

Действительно, пусть O — центр описанного круга, H — ортоцентр, BF и CK — высоты (рис. 68).

Проводим $OE\perp AB$, MN — среднюю линию треугольника BHC и DE, являющуюся средней линией треугольника ABC. Так как DE равна $\frac{1}{2}$ BC и параллельна BC и MN равна $\frac{1}{2}BC$ и параллельна BC, то DE равна и параллельна MN. Треугольник DOE равен треугольнику MHN, так как $DE=MN$, $\angle D=\angle M$, $\angle E=\angle N$ (углы с соответственно параллельными сторонами). Следовательно, $OD=HM=\frac{1}{2}BH$.

Теперь приступим к непосредственному доказательству нашей теоремы. Пусть BF и AL — высоты, BD — медиана (рис. 69). Так как $OD\perp AC$, то $OD=\frac{1}{2}BH$.

Проводим отрезок OH, который пересекает медиану BD в точке M. Проводим NK — среднюю линию MBH. Так как $NK=\frac{1}{2}BH$, то $NK=OD$, кроме того, $\angle MNK=\angle ODM$ и $\angle NKM=\angle DOM$ (внут-

ренние накрестлежащие углы при параллельных NK и OD). Следовательно треугольники MNK и ODM равны, а поэтому $NM=MD$. Но $BN=NM$, поэтому $MD=\frac{1}{3}BD$, т. е. точка M есть точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Таким образом, доказано, что точки O, H и M лежат на одной прямой.

396. Замечая, что n-й член ряда равен $2\cdot4\cdot6\ldots2(n-1)(2n-1)$, и складывая тождества

$$1=1,$$
$$2\cdot3=2(4-1)=2\cdot4-2,$$
$$2\cdot4\cdot5=2\cdot4(6-1)=2\cdot4\cdot6-2\cdot4,$$
$$2\cdot4\cdot6\cdot7=2\cdot4\cdot6\cdot8-2\cdot4\cdot6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots[2(n-1)(2n-1)]=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(2n)-2\cdot4\cdots[2(n-1)],$$

получим $1+2\cdot3+2\cdot4\cdot5+2\cdot4\cdot6\cdot7+\ldots+2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots[2(n-1)]\times(2n-1)=(2\cdot4\cdot6\ldots2n)-1=2^n\cdot n!-1$.

397. Складывая тождества

$$1\cdot2=1(3-1)=1\cdot3-1,$$
$$1\cdot3\cdot4=1\cdot3(5-1)=1\cdot3\cdot5-1\cdot3,$$
$$1\cdot3\cdot5\cdot6=1\cdot3\cdot5\cdot7-1\cdot3\cdot5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots(2n-1)2n=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots$$
$$\cdots(2n-1)(2n+1)-1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots(2n-1),$$

находим

$$1\cdot2+1\cdot3\cdot4+1\cdot3\cdot5\cdot6+\cdots+1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots(2n-1)2n=$$
$$=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)-1.$$

398. Имеем $f(\alpha)+f(\beta)=\lg\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\lg\frac{1-\beta}{1+\beta}$, т. е.

$$f(\alpha)+f(\beta)=\lg\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)=\lg\frac{1-\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}}{1+\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}}=\lg\frac{1+\alpha\beta-\alpha-\beta}{1+\alpha\beta+\alpha+\beta}, \text{ т. е.}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)=\lg\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$f(\alpha)+f(\beta)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right).$$

399. Так как $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$, то

$$\log_3 2=\frac{\lg 2}{\lg 3},\ \log_4 3=\frac{\lg 3}{\lg 4},\ \log_5 4=\frac{\lg 4}{\lg 5},\ \ldots,$$

$$\log_{10} 9=\frac{\lg 9}{\lg 10}=\lg 9.$$

Следовательно,

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdots\log_{10} 9=\frac{\lg 2}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 5}\cdots\frac{\lg 9}{1}=\lg 2,$$

что и требовалось доказать.

400. Из равенства $a=b\cdot\cos\gamma+c\cdot\cos\beta$ находим $b=\dfrac{a-c\cdot\cos\beta}{\cos\gamma}$. Подставляя это значение во второе равенство условия, получим $\dfrac{a-c\cdot\cos\beta}{\cos\gamma}=c\cdot\cos\alpha+a\cdot\cos\gamma$. Отсюда находим

$$a=\frac{c\cdot(\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}. \tag{1}$$

Из первых двух равенств условия также находим

$$b=\frac{c\,(\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}. \tag{2}$$

Учитывая равенства (1) и (2), третье равенство условия перепишем в виде

$$c=\frac{c\,(\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}\cdot\cos\beta+\frac{c\cdot(\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}\cdot\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma.$$

Прибавим к обеим частям последнего равенства по $\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma$. Имеем

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma=$$
$$=1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma,$$

или

$$(\cos\alpha+\cos\beta.\cos\gamma)^2=\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma. \tag{3}$$

Из равенства (2) следует, что

$$\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\frac{b\cdot\sin^2\gamma}{c}. \tag{4}$$

Следовательно, сумма $\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma$ положительна, а потому из равенства (3) вытекает, что

$$\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\sin\beta\cdot\sin\gamma. \qquad (5)$$

Отсюда

$$\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma),$$

$$\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)=0,$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}=0.$$

Из последнего равенства следует, что или $\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}=(2m+1)\frac{\pi}{2}$, или $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, где m и n — целые числа. Легко убедиться, что равенство $\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}=(2m+1)\frac{\pi}{2}$ невозможно. Действительно, из этого равенства следует, что $\alpha-\beta-\gamma=(2m+1)\pi$, откуда $\beta=\alpha-\gamma-(2m+1)\pi$. Поэтому $\cos\beta=\cos(\alpha-\gamma-\pi)=-\cos(\alpha-\gamma)=$ $=-\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma$. Следовательно,

$$\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\gamma=-\sin\alpha\cdot\sin\gamma<0,$$

что противоречит равенству (4). Таким образом, имеем только одно соотношение

$$\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi.$$

Так как $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$, $0<\gamma<\pi$, то $0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$, должно быть $0<(2n+1)\pi<3\pi$. Но поскольку $2n+1$ — нечётное число, то $2m+1=1$. Итак, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Теперь докажем вторую часть утверждения задачи.

Имеем

$$\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\gamma=\cos(\pi-\alpha-\gamma)+\cos\alpha\cdot\cos\gamma=$$

$$=-\cos(\alpha+\gamma)+\cos\alpha\cdot\cos\gamma;\ \text{т. е. } \cos\beta+$$

$$+\cos\alpha\cdot\cos\gamma=\sin\alpha\cdot\sin\gamma. \qquad (6)$$

Из равенств (1) и (6) находим $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$, а из равенств (2) и (5) получаем $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. Следовательно, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=$ $=\frac{c}{\sin\gamma}$.

401. Перепишем данное равенство в виде

$$a\cdot\cos^2\alpha+c=-b\cdot\cos\alpha.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$a^2\cos^4\alpha+2ac\cdot\cos^2\alpha+c^2=b^2\cos^2\alpha,$$

или, умножая обе части на 4 и произведя простые преобразования, получаем

$$a^2(2\cos^2\alpha)^2+(4ac-2b^2)\cdot 2\cos^2\alpha+4c^2=0.$$

Но так как $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, то последнее равенство перепишется в виде

$$a^2(1+\cos 2\alpha)^2+(4ac-2b^2)(1+\cos 2\alpha)+4c^2=0.$$

Располагая левую часть этого равенства по степеням $\cos 2\alpha$, получаем

$$a^2\cos^2 2\alpha+(2a^2+4ac-2b^2)\cdot\cos 2\alpha+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0,$$

что и требовалось доказать.

402. Имеем

$$2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}=\frac{2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

откуда следует левое неравенство.

Далее,

$$2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}=\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}>\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

откуда следует правое неравенство.

403. Придавая x в неравенствах предыдущей задачи последовательно значения 2, 3, 4, 5 ... n, получим

$$\left.\begin{aligned}
&2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2,\\
&2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},\\
&2\sqrt{5}-2\sqrt{4}<\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Также имеем

$$1=\frac{1}{\sqrt{1}}=1. \tag{2}$$

Сложив почленно все неравенства (1) и равенство (2), получаем

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

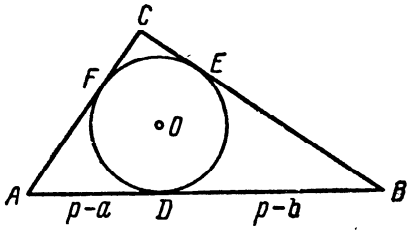

Рис. 70

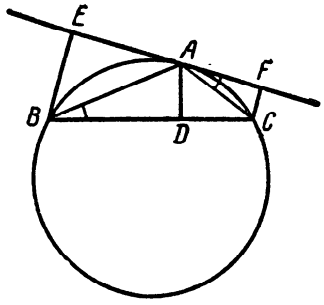

Рис. 71

404. Первое решение. Пусть вписанный круг касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC соответственно в точках D, E и F (рис. 70). По свойству касательных имеем

$$AC=AF+FC=AD+CE, \tag{1}$$

$$BC=CE+BD. \tag{2}$$

Из условия $AC\cdot CB=2AD\cdot DB$ и равенств (1), (2) следует, что

$$(AD+CE)\cdot(CE+BD)=2AD\cdot DB,$$

откуда

$$CE^2+AB\cdot CE-AD\cdot DB=0.$$

Это равенство решим относительно CE:

$$CE=\frac{-AB+\sqrt{AB^2+4\cdot AD\cdot DB}}{2}.$$

Но так как $2AD\cdot DB=AC\cdot CB$, то

$$CE=\frac{-AB+\sqrt{AB^2+2AC\cdot CB}}{2}. \tag{3}$$

Периметр треугольника ABC равен

$$AB + BC + CA = AB + BE + EC + CF + FA = 2AB + 2EC.$$

Подставляя значение EC из равенства (3), получаем

$$AB + BC + CA = 2AB + \left(-AB + \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot CB}\right),$$

откуда

$$BC + CA = \sqrt{AB^2 + 2 \cdot BC \cdot CA}. \qquad (4)$$

Возведя обе части равенства (4) в квадрат, получим

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом ACB.

Второе решение. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $2p$ — периметр треугольника.

Так как $BD=BE$ и $CF=CE$, то

$$AD + AF = 2p - 2a,$$

$$AD = p - a.$$

Так же получим

$$BD = p - b.$$

Из условия следует

$$ab = 2(p-a)(p-b),$$

$$2ab = (2p - 2a)(2p - 2b),$$

$$2ab = (b + c - a)(a + c - b),$$

$$2ab = c^2 - (a-b)^2,$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Следовательно, угол ACB прямой.

405. Пусть A — данная точка окружности, BC — данная хорда, AD — перпендикуляр к BC; BE и CF — перпендикуляры к касательной EF в точке A (рис. 71). Требуется доказать, что

$$\frac{BE}{AD} = \frac{AD}{CF}.$$

Прямоугольные треугольники ABD, ACF подобны, так как у них острые углы ABD, CAF измеряются половиной одной и той же дуги AC. Таким же образом докажем подобие треугольников ACD и ABE. Четырехугольники $BEAD$ и $ADCF$ подобны, так как они сходственным образом составлены из подобных треугольников. Приравнивая отношения сходственных сторон, получим $\frac{BE}{AD} = \frac{AD}{CF}$, что и требовалось доказать.

406. В силу условия задачи имеем

$$(ap^{n-1} + bq^{n-1}) \cdot x + (ap^{n-2} + bq^{n-2}) \cdot y = ap^n + bq^n, \qquad (1)$$

$$(ap^n + bq^n) \cdot x + (ap^{n-1} + bq^{n-1}) \cdot y = ap^{n+1} + bq^{n+1}.$$

Исключив из этих равенств y, найдем

$$[(ap^{n-1}+bq^{n-1})^2-(ap^n+bq^n)(ap^{n-2}+bq^{n-2})]\,x=$$
$$=(ap^n+bq^n)(ap^{n-1}+bq^{n-1})-(ap^{n+1}+bq^{n+1})(ap^{n-2}+bq^{n-2}),$$

или

$$-abp^{n-2}q^{n-2}(p^2-2pq+q^2)\,x=-abp^{n-2}q^{n-2}(p^3-p^2q-pq^2+q^3),$$

или

$$(p-q)^2\,x=(p-q)^2(p+q),$$

откуда $x=p+q$. Подставим в равенство (1) найденное значение x,

$$(ap^{n-1}+bq^{n-1})(p+q)+(ap^{n-2}+bq^{n-2})\,y=ap^n+bq^n.$$

После простых преобразований последнее равенство перепишется в виде

$$(ap^{n-2}+bq^{n-2})\cdot y=-pq(ap^{n-2}+bq^{n-2}),$$

откуда $y=-pq$. Итак, искомые числа $x=p+q$, $y=-pq$.

407. Имеем

$$\log_{\frac{1}{m}}\frac{1}{n}=\frac{\log_m\frac{1}{n}}{\log_m\frac{1}{m}}=\frac{\log_m(n^{-1})}{\log_m(m^{-1})}=\frac{-\log_m n}{-1}=\log_m n,$$

что и требовалось доказать.

408. Из условия задачи имеем

$$2\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta=2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta). \qquad (1)$$

и

$$4\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta=2\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta). \qquad (2)$$

Разделив почленно равенство (2) на (1), получим

$$\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2,\ \text{или}\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha.$$

409. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)\geqslant a^6+b^6+2a^3b^3,$$

или $a^2b^2(a^2+b^2)\geqslant 2a^3b^3$. Если $ab\neq 0$, то $a^2+b^2\geqslant 2ab$, что очевидно. Если же $ab=0$, то очевидно, имеет место равенство. Итак, равенство достигается лишь при $a=b$ или при $ab=0$.

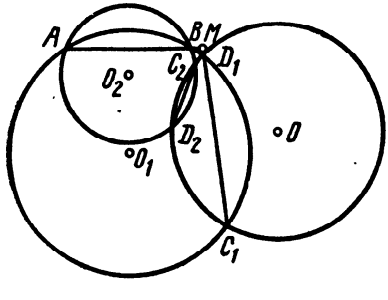

Рис. 72

410. Проводим через точки A и B окружности O_1, O_2 и т. д., которые пересекают окружность O соответственно в точках C_1 и D_1, C_2 и D_2 и т. д. (рис. 72).

Пусть M — точка пересечения прямых AB и C_1D_1. Про-

водим прямую MC_2 и допустим, что эта прямая пересекает окружность O в точке E, а окружность O_2 в точке F. Для окружности O_2

$$MA \cdot MB = MF \cdot MC_2, \tag{1}$$

для окружности O_1

$$MA \cdot MB = MC_1 \cdot MD_1, \tag{2}$$

для окружности O

$$MC_1 \cdot MD_1 = ME \cdot MC_2. \tag{3}$$

Из (1) и (2) следует

$$MF \cdot MC_2 = MC_1 \cdot MD_1. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует

$$ME \cdot MC_2 = MF \cdot MC_2.$$

Следовательно, $ME = MF$, т. е. точки E и F совпадают. Но точка E принадлежит окружности O, а точка F принадлежит окружности O_2. Следовательно, точки E и F совпадают с точкой D_2.

Таким образом, прямые AB и C_2D_2 также пересекаются в точке M, т. е. M — определенная точка на продолжении хорды AB, и через эту точку проходят продолжения всех общих хорд окружности O и окружностей, проходящих через точки A и B.

411. Поскольку, по условию, сумма $m+n$ членов, а также сумма $m+p$ членов равна двойной сумме m членов, то если обозначим первый член прогрессии через a, а ее разность — через d, получим

$$\frac{m+n}{2}[2a + d(m+n-1)] = \frac{m+p}{2}[2a + d(m+p-1)] =$$

$$= m[2a + d(m-1)].$$

Для удобства обозначим эти три равные величины через k. Тогда имеем

$$2a + (m+n-1)d = \frac{2k}{m+n}$$

и

$$2a + (m-1)d = \frac{k}{m}.$$

Из этих двух равенств получаем

$$nd = k\left(\frac{2}{m+n} - \frac{1}{m}\right) = \frac{(m-n)k}{m(m+n)}. \tag{1}$$

Аналогично находим

$$pd = \frac{(m-p)k}{m(m+p)}. \tag{2}$$

Поделив почленно равенство (1) на равенство (2), находим

$$\frac{n}{p} = \frac{m(m-n)(m+p)}{m(m+n)(m-p)},$$

или

$$\frac{(m+n)(m-p)}{mp}=\frac{(m+p)(m-n)}{mn},$$

откуда

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=(m+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

412. Пусть a — первый член прогрессии, а d — разность этой прогрессии. Имеем

$$S_m=\frac{m[2a+d(m-1)]}{2},\quad S_n=\frac{n[2a+d(n-1)]}{2},$$

$$S_{m+n}=\frac{(m+n)[2a+d(m+n-1)]}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{\frac{m-n}{2}[2a+d(m+n-1)]}{\frac{m+n}{2}[2a+d(m+n-1)]}=\frac{m-n}{m+n},$$

что и требовалось доказать.

413. Из условия задачи следует, что

$a^p=N$, $b^q=N$, $(abc)^r=N$, или $a=N^{\frac{1}{p}}$, $b=N^{\frac{1}{q}}$, $abc=N^{\frac{1}{r}}$.

Отсюда получаем

$$ab=N^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}},\qquad (1)$$

$$c=\frac{N^{\frac{1}{r}}}{ab}.\qquad (2)$$

Подставляя значение ab из равенства (1) в (2), имеем

$$c=\frac{N^{\frac{1}{r}}}{N^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}=N^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}=N^{\frac{pq-r(p+q)}{pqr}}.$$

Возвышая обе части последнего равенства в степень $\frac{pqr}{pq-r(p+q)}$, получаем $N=c^{\frac{pqr}{pq-r(p+q)}}$.

414. Имеем $\log_b a=\frac{\log_d a}{\log_d b}$, $\log_c b=\frac{\log_d b}{\log_d c}$. Поэтому

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \frac{\log_d a}{\log_d b} \cdot \frac{\log_d b}{\log_d c} \cdot \log_d c = \log_d a,$$

что и требовалось доказать.

415. Данное равенство можно переписать в виде

$$\cos x (\sin^2 \beta \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta) = \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta =$$
$$= \cos^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \beta) - \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta.$$

Отсюда получаем

$$\cos x = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Но так как $\sin^2 \beta \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha (1 - \cos^2 \beta) - \cos \beta (1 - \cos^2 \alpha) = \cos \alpha - \cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta (\cos \alpha - \cos \beta) = (\cos \alpha - \cos \beta)(1 + \cos \alpha \cos \beta)$, то поэтому

$$\cos x = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Наконец,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha - \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha + \cos \beta} =$$
$$= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2},$$

что и требовалось доказать.

416. Для удобства введем обозначения $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = m$, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = n$. Тогда первые два из данных равенств примут вид

$$xm^2 - 2ym + 2a - x = 0, \quad xn^2 - 2yn + 2a - x = 0.$$

Следовательно, m и n являются корнями некоторого уравнения вида

$$xz^2 - 2yz + 2a - x = 0.$$

Поэтому на основании формул Виета имеем $m+n = \frac{2y}{x}$, $mn = \frac{2a - x}{x}$. Также имеем еще одно равенство (из условия) $m - n = 2k$. Поскольку имеет место тождество $(m+n)^2 = (m-n)^2 + 4mn$, то $\left(\frac{2y}{x}\right)^2 = 4k^2 + 4 \cdot \frac{2a - x}{x}$. Отсюда получаем $y^2 = 2ax - (1 - k^2)x^2$, что и требовалось доказать.

417. Первое решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $y = |x-1| + |x-3| + |x-5| \geqslant 4$. Разобьем числовую ось на промежутки: $(-\infty, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 5]$, $[5, \infty)$.

а) В промежутке $(-\infty, 1]$ $y = (1-x) + (3-x) + (5-x) = -3x + 9$. В этом промежутке наименьшее значение $y = 6$ (при $x = 1$).

б) В промежутке $[1, 3]$ $y = (x-1) + (3-x) + (5-x) = -x + 7$. В этом промежутке наименьшее значение $y = 4$ (при $x = 3$).

в) В промежутке [3, 5] $y=(x-1)+(x-3)+(5-x)=x+1$. В этом промежутке наименьшее значение $y=4$ (при $x=3$).

г) В промежутке $[5, \infty)$ $y=(x-1)+(x-3)+(x-5)=3x-9$. В этом промежутке наименьшее значение $y=6$ (при $x=5$).

Из а), б), в) и г) заключаем, что $y\geqslant 4$. Равенство имеет место только при $x=3$.

Второе решение. Надо доказать, что $\rho(x, 1)+\rho(x, 3)+\rho(x, 5)\geqslant 4$, где через $\rho(a, b)$ обозначено расстояние на числовой оси от точки a до точки b. Но уже сумма $\rho(x, 1)+\rho(x, 5)$ всегда не меньше 4 (если точка x заключена между 1 и 5, то эта сумма равна 4, если нет, то больше 4). Итак, всегда $\rho(x, 1)+\rho(x, 3)+\rho(x, 5)\geqslant \rho(x, 1)+\rho(x, 5)\geqslant 4$. Равенство может достигаться лишь при $\rho(x, 3)=0$, т. е. при $x=3$, и, действительно, достигается в этом случае.

418. 1) Если $x<0$, то $\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x-2|}{x-2}=-1-1-1=-3.$

2) Если $0<x<1$, то $\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x-2|}{x-2}=1-1-1=-1.$

3) Если $1<x<2$, то $\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x-2|}{x-2}=1+1-1=1.$

4) Если $x>2$, то $\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x-2|}{x-2}=1+1+1=3.$

Из 1)—4) следует утверждение задачи.

419. Пусть O — центр описанного круга, OA_1, OB_1, OC_1 — расстояния от O до сторон a, b, c треугольника ABC (рис. 73). Поскольку в четырехугольнике AC_1OB_1 углы B_1 и C_1 прямые, то около него можно описать окружность.

В силу теоремы Птолемея (задача 420) имеем

$$AO\cdot B_1C_1=AB_1\cdot OC_1+AC_1\cdot OB_1. \qquad (1)$$

Так как

$$AO=R,\ B_1C_1=\frac{a}{2},\ AB_1=\frac{b}{2},\ AC_1=\frac{c}{2},$$

то (1) перепишется так:

$$R\cdot\frac{a}{2}=\frac{b}{2}\cdot OC_1+\frac{c}{2}\cdot OB_1,$$

или

$$Ra=b\cdot OC_1+c\cdot OB_1. \qquad (2)$$

Так как четырехугольники OA_1BC_1 и OA_1CB_1 тоже вписуемы, то рассуждая как выше, мы получим

$$Rb=c\cdot OA_1+a\cdot OC_1 \qquad (3)$$

и

$$Rc=a\cdot OB_1+b\cdot OA_1. \qquad (4)$$

Удвоенная площадь треугольника ABC равна $r(a+b+c)$ (r — радиус вписанного круга). С другой стороны, эта же удвоенная площадь равна

$$a \cdot OA_1 + b \cdot OB_1 + c \cdot OC_1,$$

следовательно,

$$r(a + b + c) = a \cdot OA_1 + b \cdot OB_1 + c \cdot OC_1. \qquad (5)$$

Сложив почленно равенства (2), (3), (4) и (5) и поделив обе части полученного равенства на сумму $(a+b+c)$, получим

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r,$$

что и требовалось доказать.

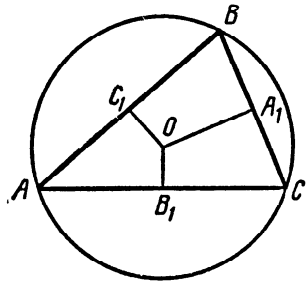

Рис. 73

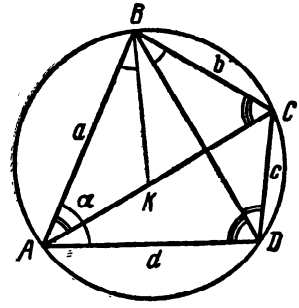

Рис. 74

420. Требуется доказать, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (рис. 74). Построим угол ABK, равный углу CBD. Треугольники ABK и DBC подобны, так как $\angle ABK = \angle CBD$ (по построению), $\angle BAC = \angle BDC$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC). Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BD}{CD},$$

или

$$AB \cdot CD = AK \cdot BD. \qquad (1)$$

Треугольники BCK и ABD также подобны, поскольку

$$\angle KBC = \angle ABD$$

(так как $\angle KBC = \angle CBD + \angle DBK$, $\angle ABD = \angle ABK + \angle DBK$)

и

$$\angle ACB = \angle ADB$$

(вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB). Из подобия последних двух треугольников имеем

$$\frac{BC}{KC} = \frac{BD}{AD},$$

т. е.

$$BC \cdot AD = KC \cdot BD. \qquad (2)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получаем

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AK + KC)\, BD,$$

или окончательно

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

421. Имеем $ax = \dfrac{ax(1-b)}{1-b}$, $(a+ab)x^2 = \dfrac{ax^2(1-b^2)}{1-b}$, $(a+ab+ab^2)x^3 = \dfrac{ax^3(1-b^3)}{1-b}, \ldots$

Следовательно,

$$S = \frac{ax}{1-b}(1 + x + x^2 + \cdots) - \frac{abx}{1-b}(1 + bx + b^2x^2 + \cdots).$$

Поскольку выражения, заключенные в скобках, являются суммами бесконечно убывающих геометрических прогрессий, то

$$S = \frac{ax}{1-b} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{abx}{1-b} \cdot \frac{1}{1-bx} = \frac{ax}{1-b}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{b}{1-bx}\right) =$$

$$= \frac{ax}{(1-x)(1-bx)}.$$

422. Из условия задачи следует, что $a^2 = c^2 - b^2$, или

$$a^2 = (c+b) \cdot (c-b).$$

При $a \neq 1$ имеем

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = \frac{1}{\log_a (c+b)} + \frac{1}{\log_a (c-b)} =$$

$$= \frac{\log_a (c-b) + \log_a (c+b)}{\log_a (c+b) \cdot \log_a (c-b)} = \frac{\log_a (c^2 - b^2)}{\log_a (c+b) \cdot \log_a (c-b)} =$$

$$= \frac{\log_a a^2}{\log_a (c+b) \cdot \log_a (c-b)} = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Если $a = 1$, то

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 0 + 0 = 0$$

и

$$2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, во всех случаях

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a,$$

что и требовалось доказать.

423. Из условия следует, что $\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2} = (1-\cos\varphi)\cdot(1-\cos\theta) = \left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)\cdot\left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)$. Отсюда получаем $1-\cos^2\alpha = 1-\cos\alpha\cdot\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}$, т. е.

$$\cos^2\alpha\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}\right)=\cos\alpha\cdot\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

Но так как $\cos\alpha\neq 0$, то

$$\cos\alpha=\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\beta-\cos\gamma}{1+\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta+\cos\gamma}=$$
$$=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

424. Пусть $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=a$, $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=b$, откуда

$$a^3+b^3=3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}=6. \tag{1}$$

Очевидно, что $ab^2+a^2b<a^3+b^3$ (здесь строгое неравенство, так как $a\neq b$), или $ab(a+b)<a^3+b^3=6$, или

$$3ab(a+b)<18. \tag{2}$$

Сложив почленно (1) и (2), получим $(a+b)^3<24=8\cdot 3$, откуда

$$a+b<2\sqrt[3]{3}.$$

425. Так как AC равна стороне квадрата, вписанного в круг диаметра AB, то имеем

$$AB^2=2\cdot AC^2. \tag{1}$$

Продолжим хорды MA и MB до их встречи в точках K и L с продолжениями стороны CD (рис. 75). На основании теоремы о пучке прямых, исходящих из одной точки, имеем

$$\frac{KC}{AE}=\frac{CD}{EF}=\frac{DL}{FB}. \tag{2}$$

Далее, из подобия треугольников AKC и BDL следует, что

$$\frac{KC}{BD}=\frac{AC}{DL}. \tag{3}$$

Но так как $BD=AC$, то из (3) имеем

$$2KC\cdot DL = 2AC^2 = AB^2 = CD^2. \qquad (4)$$

Из соотношений (2) и (4) находим

$$2\cdot AE\cdot BF = EF^2.$$

Поскольку $AF+BE=AB+EF$, то

$$AF^2 + BE^2 + 2\cdot AF\cdot BE = AB^2 + EF^2 + 2AB\cdot EF =$$
$$= AB^2 + 2AE\cdot BF + 2AB\cdot EF = AB^2 + 2(AE\cdot BF + AB\cdot EF). \qquad (5)$$

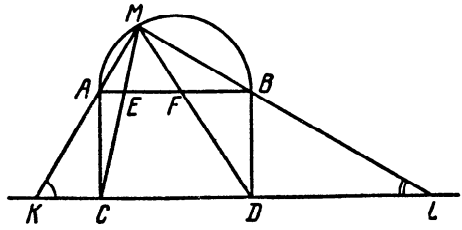

Рис. 75

Так как $(AE+EF)\cdot(EF+FB)=AE\cdot BF+(AE+EF+FB)\cdot EF$, то

$$AF\cdot BE = AE\cdot BF + AB\cdot EF. \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) следует

$$AF^2 + BE^2 = AB^2,$$

что и требовалось доказать.

426. Если обозначить первый член арифметической прогрессии через a, а разность — через d, то, согласно условию задачи, числа

$$a + d(p-1),\ a + d(q-1),\ a + d(r-1),\ a + d(s-1)$$

составляют геометрическую прогрессию. Следовательно,

$$a + d(q-1) = [a + d(p-1)]\cdot t, \qquad (1)$$
$$a + d(r-1) = [a + d(q-1)]\cdot t, \qquad (2)$$
$$a + d(s-1) = [a + d(r-1)]\cdot t, \qquad (3)$$

где t — знаменатель прогрессии.

Если вычтем из равенства (1) равенство (2), то получим

$$d(q-r) = d(p-q)\cdot t, \qquad (4)$$

а если вычтем из равенства (2) равенство (3), то найдем

$$d(r-s) = d(q-r)\cdot t. \qquad (5)$$

Наконец, поделив почленно равенство (4) на равенство (5), получаем

$$\frac{p-q}{q-r} = \frac{q-r}{r-s}.$$

Значит, числа $p—q$, $q—r$, $r—s$ составляют геометрическую прогрессию, что и требовалось доказать.

427. Перепишем левую часть доказываемого равенства в виде

$$\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}\right)+\frac{1}{7^3}\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}\right)+ \\ +\frac{1}{7^6}\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}\right)+\cdots \qquad (1)$$

Но так как $\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}=\frac{123}{7^3}$, то (1) принимает вид

$$\frac{123}{7^3}+\frac{1}{7^3}\cdot\frac{123}{7^3}+\frac{1}{7^6}\cdot\frac{123}{7^3}+\cdots$$

Таким образом, надо найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен $\frac{123}{7^3}$, а знаменатель есть $\frac{1}{7^3}$. Искомая сумма равна $\frac{123}{7^3}:\left(1-\frac{1}{7^3}\right)=\frac{41}{114}$.

428. Пользуясь формулой $\log_m N=\frac{\log_n N}{\log_n m}$, данное равенство перепишем в таком виде

$$\frac{\lg x}{\lg a}+\frac{\lg x}{\lg b}+\frac{\lg x}{\lg c}=\frac{\lg x}{\lg a+\lg b+\lg c}.$$

Это равенство имеет место при любом положительном x тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}+\frac{1}{\lg c}=\frac{1}{\lg a+\lg b+\lg c},$$

или

$$(\lg a+\lg b+\lg c)\cdot(\lg b\cdot\lg c+\lg c\cdot\lg a+\lg a\cdot\lg b)- \\ -\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c=0,$$

или

$$(\lg b+\lg c)(\lg c+\lg a)(\lg a+\lg b)=0,$$

или

$$\lg bc\cdot\lg ca\cdot\lg ab=0.$$

Таким образом, одно из чисел bc, ca или ab должно быть равно 1. Следовательно, искомое соотношение таково

$$(bc-1)(ca-1)(ab-1)=0.$$

429. Условие задачи можно переписать в виде $a^2+b^2+2ab=9ab$, или $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab$. Прологарифмируем обе части последнего равенства

$$\lg\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \lg(ab),$$

или

$$2\lg\frac{a+b}{3} = \lg a + \lg b,$$

а следовательно,

$$\lg\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b).$$

430. Из равенства $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$ находим

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Поэтому

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} =$$

$$= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} =$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}.$$

Итак,

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}. \quad (1)$$

В силу того, что данные соотношения в условии задачи переходят одно в другое при круговой перестановке чисел a, b, c, α, β, γ, то отношения $\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b}$ и $\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}$ также равны правой части равенства (1).

Итак, имеем

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}. \quad (2)$$

Но так как $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ положительны, поскольку a, b, c, α, β, γ принадлежат интервалу $(0, \pi)$, то из равенства (2) следует, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

431. Имеем

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$
$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha,$$
$$\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 2^n\alpha = 2\sin 2^{n-1}\alpha\cdot\cos 2^{n-1}\alpha.$$

Перемножив почленно все эти n равенств, получим равенство

$$\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha\cdot\sin 8\alpha\ldots\sin 2^n\alpha = 2^n\cdot\sin\alpha\times$$
$$\times\sin 2\alpha\ldots\sin 2^{n-1}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\ \ldots\cos 2^{n-1}\alpha.$$

Поделив обе части последнего равенства на произведение $\sin 2\alpha \sin 4\alpha \ldots \sin 2^{n-1}\alpha$, получим

$$\sin 2^n\alpha = 2^n\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdots\cos 2^{n-1}\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\ldots\cos 2^{n-1}\alpha = \frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}.$$

432. Так как $x>\sqrt{ab}$, то $x>0$, $x+a>x+b>0$. Неравенство $\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \dfrac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ верно, если

$$\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} > \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2},\quad \frac{(x^2+a^2)+2ax}{x^2+a^2} > \frac{(x^2+b^2)+2bx}{x^2+b^2},$$
$$1+\frac{2ax}{x^2+a^2} > 1+\frac{2bx}{x^2+b^2},\quad \frac{a}{x^2+a^2} > \frac{b}{x^2+b^2},$$
$$a(x^2+b^2) > b(x^2+a^2),$$

или $(a-b)x^2>ab(a-b)$. Но так как $a>b$, то последнее неравенство верно, если $x^2>ab$, или $x>\sqrt{ab}$.

433. Первое решение. Очевидно, что если $a=b=c=0$, то имеет место равенство. Если же хотя бы одно из чисел a, b, c не равно нулю, то $\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$, поэтому можно произвести следующие преобразования

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$
$$= |a|\cdot\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + |b|\cdot\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + |c|\cdot\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Таким образом, когда a, b и c одновременно не равны нулю, то доказываемое неравенство верно, если

$$|a|\cdot\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+|b|\cdot\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot|c|\leqslant$$
$$\leqslant|a|+|b|+|c| \qquad (1)$$

Поскольку $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant|b|$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant|c|$,

то

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant 1,\quad \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant 1,\quad \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant 1,$$

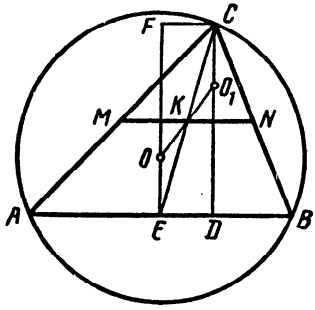

Рис. 76

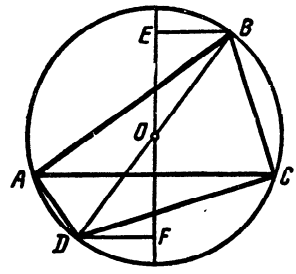

Рис. 77

а поэтому слагаемые левой части неравенства (1) соответственно меньше $|a|$, $|b|$ и $|c|$. Итак, неравенство (1) верно, а вместе с ним верно и доказываемое.

Второе решение. Докажем, что $a^2+b^2+c^2\leqslant(|a|+|b|+|c|)^2$, т. е. $a^2+b^2+c^2\leqslant a^2+b^2+c^2+2|a|\cdot|b|+2\cdot|a|\cdot|c|+2|b|\cdot|c|$, что очевидно.

Поэтому $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leqslant|a|+|b|+|c|$. Равенство имеет место, если по крайней мере два из чисел a, b, c равны нулю.

434. Пусть треугольник ABC вписан в круг с центром O, высота треугольника CD, средняя линия MN параллельна AB (рис. 76). Соединим отрезком вершину C с серединой E стороны AB. Отрезок CE пересекает MN в точке K, при этом $CK=KE$, так как точка K принадлежит средней линии треугольника CED. Докажем, что точка K делит MN пополам. Действительно, $MK=\frac{AE}{2}$ как средняя линия треугольника ACE. Но так как $AE=\frac{AB}{2}$ и $MN=\frac{AB}{2}$, то $MK=\frac{MN}{2}$. На высоте CD построим прямоугольник $CDEF$, сторона

EF проходит через центр O окружности. Очевидно, что точка K является точкой пересечения диагоналей прямоугольника $CDEF$ с центром симметрии его. Поэтому точка O_1, симметричная O относительно K, находится на CD.

435. Около четырехугольника $ABCD$ (рис. 77) можно описать окружность, так как $\angle BAD=\angle BCD=90°$. Отрезок BD, на который опирается вписанный прямой угол BAD, есть диаметр этой окружности, так что BD проходит через центр O. Перпендикуляр, проведенный к хорде AC через ее середину, также проходит через центр O круга.

Опустив из точек B и D соответственно перпендикуляры BE и DF на перпендикуляр, проведенный к хорде AC через ее середину, находим, что прямоугольные треугольники ODF и OBE равны, так как гипотенузы их OD и OB равны как радиусы одного круга и $\angle DOF=\angle BOE$. Следовательно, $DF=BE$.

Мы исходили из того, что прямая BD не совпадает с перпендикуляром к хорде AC, проведенным через ее середину. Если же прямая BD совпадает с этим перпендикуляром, то расстояния BE и DF обращаются в нуль, т. е. и в этом случае $DF=BE$.

436. Имеем $S=-\left(a_2^2-a_1^2\right)-\left(a_4^2-a_3^2\right)-\cdots-\left(a_{2n}^2-a_{2n-1}^2\right)=$ $=-\left[\left(a_2-a_1\right)\left(a_2+a_1\right)+\left(a_4-a_3\right)\left(a_4+a_3\right)+\cdots+\left(a_{2n}-a_{2n-1}\right)\times\right.$ $\left.\times\left(a_{2n}+a_{2n-1}\right)\right]=-d\left(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}\right)$, так как разность прогрессий $d=a_2-a_1=a_4-a_3=\cdots=a_{2n}-a_{2n-1}$.

Итак,

$$S=-d\cdot\frac{2a_1+d\left(2n-1\right)}{2}\cdot 2n=dn\left[d\left(1-2n\right)-2a_1\right].$$

437. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(n+1)^n=n^n+n\cdot n^{n-1}\cdot 1+\cdots=2n^n+\cdots$$

Следовательно,

$$(n+1)^n>2n^n.$$

Возвысив обе части этого неравенства в 10-ю степень, получим

$$(n+1)^{10n}>2^{10}\cdot n^{10n}.$$

Но так как

$$2^{10}=1024>1000, \text{ то}$$

$$(n+1)^{10n}>1000\cdot n^{10n}.$$

Логарифмируя обе части последнего неравенства по основанию 10, находим

$$\lg\left(n+1\right)>\frac{3}{10\,n}+\lg n.$$

Придавая здесь n значения от 1 до $m-1$, получим

$$\lg 2>\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1}+\lg 1,$$

$$\lg 3 > \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + \lg 2,$$

. . . . . .

$$\lg m > \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{m-1} + \lg(m-1).$$

Сложив почленно эти m—1 неравенств, получим

$$\lg m > \frac{3}{10}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m-1}\right).$$

Теперь придадим m значения от 2 до k. Имеем

$$\lg 2 > \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{1}\right),$$

$$\lg 3 > \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\lg 4 > \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

. . . . . .

$$\lg k > \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1}\right).$$

Сложив почленно вее полученные неравенства, находим

$$\lg 2 + \lg 3 + \cdots + \lg k = \lg(k!) > \frac{3}{10}\left(\frac{k-1}{1} + \frac{k-2}{2} + \frac{k-3}{3} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{k-(k-1)}{k-1}\right) = \frac{3}{10}\left[k\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1}\right) - \right.$$

$$\left. - (k-1)\right] = \frac{3}{10}\, k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right),$$

$$\text{т. е. } \lg(k!) > \frac{3}{10}\, k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right),$$

что и требовалось доказать.

438. Так как $A+B+C=\pi$, то имеем

$$\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C. \quad (1)$$

Обозначим каждое из данных равных отношений через t. Тогда

$$\sin A = \frac{a}{t}, \quad \sin B = \frac{b}{t}, \quad \sin C = \frac{c}{t}.$$

Подставляя эти значения $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ в равенство (1), получим

$$\frac{a}{t} = \frac{b}{t}\cos C + \frac{c}{t}\cos B,$$

или

$$a = b\cos C + c\cos B. \tag{2}$$

Аналогично находим

$$b = c\cos A + a\cos C, \tag{3}$$

$$c = a\cos B + b\cos A. \tag{4}$$

Умножим обе части равенств (2), (3), (4) соответственно на a, $-b$, $-c$.

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= ab\cos C + ac\cos B, \\ -b^2 &= -bc\cos A - ab\cos C, \\ -c^2 &= -ac\cos B - bc\cos A. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Сложив почленно равенства (5), получим

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A,$$

откуда

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

что и требовалось доказать.

439. Первое решение. Имеем $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \leqslant 2-2xy$, откуда $2xy \leqslant 2$, т. е.

$$xy \leqslant 1. \tag{1}$$

Далее,

$$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+y^2+2xy}. \tag{2}$$

Так как, по условию, $x^2+y^2 \leqslant 2$, то из (2) вытекает, что

$$|x+y| \leqslant \sqrt{2+2xy}. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что $|x+y| \leqslant \sqrt{2+2} = 2$.

Второе решение. Так как $4 \geqslant 2(x^2+y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2 \geqslant (x+y)^2$, то $|x+y| \leqslant 2$.

440. Первое решение. Пусть AMD — перпендикуляр, опущенный из точки A на касательную DB, а M — вторая точка пересечения AD с окружностью (рис. 78). Из прямоугольного треугольника ABD имеем

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Но $BD^2 = AD \cdot MD$, поэтому

$$AB^2 = AD \cdot MD + AD^2,$$

откуда

$$\frac{AB^2}{AD} = MD + AD.$$

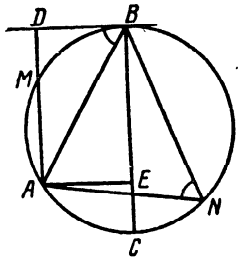

Рис. 78

Легко доказать, что $MD+AD$ есть величина постоянная при любом положении точек A и B, следовательно, и отношение $AB^2 : AD$ есть величина постоянная.

Второе решение. Соединим произвольную точку N дуги ANB с точками A и B (рис. 78). Углы ABD и ANB равны как измеряющиеся половиной дуги AMB. Обозначим их через α.

Имеем

$$\frac{AB}{AD}=\frac{1}{\sin\alpha} \text{ и } AB=2R\cdot\sin\alpha,$$

где R — радиус окружности.

Перемножив последние равенства почленно, получим

$$\frac{AB^2}{AD}=2R \text{ — постоянная величина.}$$

Третье решение. Проводим диаметр BC и $AE\perp BC$ (рис. 78). Имеем $AB^2=BC\cdot BE$ или $AB^2=BC\cdot AD$ (так как $BE=AD$).

Следовательно,

$$\frac{AB^2}{AD}=BC=2R \text{ — постоянная величина.}$$

441. Напишем $n+1$ очевидных равенств

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}=\frac{2}{a^2-1},$$
$$\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+1}=\frac{2}{a^4-1},$$
$$\frac{1}{a^4-1}-\frac{1}{a^4+1}=\frac{2}{a^8-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{a^{2^n}-1}-\frac{1}{a^{2^n}+1}=\frac{2}{a^{2^{n+1}}-1},$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}=\frac{2}{a^2-1},\\
&\frac{2}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+1}=\frac{2^2}{a^4-1},\\
&\frac{2^2}{a^4-1}-\frac{2^2}{a^4+1}=\frac{2^3}{a^8-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), получим

$$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{4}{a^4+1}+\cdots+\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{1}{a-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

442. Перепишем данный многочлен в виде $x^n-1-ax(x^{n-2}-1)$ и разделим его на двучлен $x-1$, используя формулу

$$\frac{x^{k+1}-1}{x-1}=x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1.$$

В результате в частном получим многочлен

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1-ax(x^{n-3}+x^{n-2}+\cdots+x+1).$$

Для того чтобы этот многочлен делился на $x-1$ без остатка, необходимо и достаточно (на основании теоремы Безу), чтобы выполнялось равенство $n-(n-2)a=0$. Следовательно, рассматриваемый многочлен делится без остатка на $(x-1)^2$ при любом натуральном $n>2$ и $a=\dfrac{n}{n-2}$.

443. Имеем

$$\frac{1}{\log_a N}=\log_N a,$$

$$\frac{1}{\log_{a^2} N}=\log_N a^2=2\log_N a,$$

$$\frac{1}{\log_{a^3} N}=\log_N a^3=3\log_N a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\log_{a^n} N}=\log_N a^n=n\log_N a.$$

Сложив почленно написанные n равенств, получим

$$\frac{1}{\log_a N}+\frac{1}{\log_{a^2} N}+\frac{1}{\log_{a^3} N}+\cdots+\frac{1}{\log_{a^n} N}=$$
$$=(1+2+3+\cdots+n)\cdot\log_N a.$$

Но так как $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, то утверждение задачи верно.

444. Вначале докажем необходимость условия. Так как $\log_x a=\dfrac{\log_{x+y} a}{\log_{x+y} x}$ и $\log_y a=\dfrac{\log_{x+y} a}{\log_{x+y} y}$, то $\log_x a+\log_y a=\dfrac{\log_{x+y} a}{\log_{x+y} x}+\dfrac{\log_{x+y} a}{\log_{x+y} y}$. Но так как, по условию, $\log_x a+\log_y a=\log_{x+y} a$, то имеем

$$\frac{1}{\log_{x+y} x}+\frac{1}{\log_{x+y} y}=1,$$

или

$$\log_x (x+y) + \log_y (x+y) = 1,$$

$$\log_x (x+y) + \frac{\log_x (x+y)}{\log_x y} = 1,$$

$$\log_x (x+y) \cdot (1 + \log_y x) = 1,$$

$$\log_{x+y} x = 1 + \log_y x.$$

Таким образом, условие $\log_{x+y} x = 1 + \log_y x$ является необходимым, чтобы $\log_x a + \log_y a = \log_{x+y} a$ при любом положительном a, отличном от 1. Теперь докажем достаточность этого условия. Пусть $\log_{x+y} x = 1 + \log_y x$, т. е. $\frac{1}{\log_{x+y} x} + \frac{1}{\log_{x+y} y} = 1$. Умножим обе части этого равенства на $\log_{x+y} a$.

Имеем

$$\log_{x+y} a = \frac{\log_{x+y} a}{\log_{x+y} x} + \frac{\log_{x+y} a}{\log_{x+y} y} = \log_x a + \log_y a.$$

Следовательно, мы доказали и достаточность условия.

445. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \sin\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Так как по условию $\operatorname{tg} A = \frac{1}{7}$, то

$$\cos 2A = \frac{1 - \frac{1}{49}}{1 + \frac{1}{49}} = \frac{24}{25}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg} 2B = \frac{2 \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg}^2 B} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4},$$

так как $\operatorname{tg} B = \frac{1}{3}$,

поэтому

$$\sin 4B = \frac{2 \operatorname{tg} 2B}{1 + \operatorname{tg}^2 2B} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}.$$

Следовательно,

$$\cos 2A = \sin 4B.$$

446. Имеем $\operatorname{ctg}[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1-x)] = \dfrac{1}{\operatorname{tg}[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1-x)]} =$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cdot \operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(1-x)]}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(1-x)]} = \frac{1 - x\cdot(1-x)}{x + 1 - x} = 1 - x + x^2.$$

447. Доказываемое неравенство верно, если $(y^2+1)^2x^2 - 4y(y^2-1)x + 4y^2 \geqslant 0$, или $x^2(y^2-1)^2 - 4xy(y^2-1) + 4y^2 + 4x^2y^2 \geqslant 0$, или $[(y^2-1)x - 2y]^2 + (2xy)^2 \geqslant 0$, что очевидно. Равенство достигается лишь при $x = y = 0$.

448. Имеем очевидные неравенства:

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}. \qquad (1)$$

Но так как

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)} = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \text{ и } \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k},$$

то неравенства (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}.$$

Придавая k значения 1, 2, 3, ..., p, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},\\
&\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} < \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Складывая почленно все p неравенств (2), получаем

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p},$$

что и требовалось доказать.

449. Пусть ABC — данный треугольник, $AB=BC$, $BO \| AC$, O — центр окружности, касающейся AC; D и E — точки пересечения этой окружности с AB и BC (рис. 79). Продолжим AB до второго пересечения с окружностью в точке F. Докажем, что $FE \perp BO$. Заметим, что $\angle OBF = \angle OBE$, так как эти углы равны углам при основании AC в треугольнике ABC. Далее, $BF = BE$; действительно, если бы было $BF > BE$, то, отложив на BF отрезок $BE' = BE$, мы имели бы равные треугольники OBE и OBE' и $OE' = OE$, что невозможно, так как точка E' лежит внутри окружности радиуса OE; аналогично докажем, что невозможно неравенство $BF < BE$. Но биссектриса BO в равнобедренном треугольнике FBE должна быть и высотой, что и требовалось доказать. Поэтому $\angle DFE = \frac{1}{2} \angle ABC$, не зависит от положения точки O на прямой BO. Следовательно, величина дуги

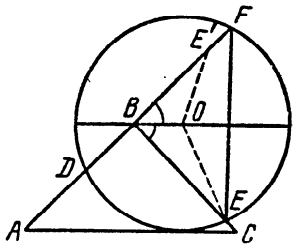

Рис. 79

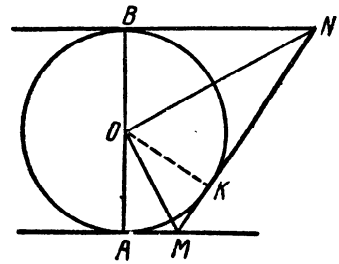

Рис. 80

DE, половиной которой измеряется $\angle DFE$, остается при качении окружности постоянной.

450. Пусть $AM \| BN$ — неподвижные касательные, MN — подвижная касательная к окружности с центром O и K — точка касания (рис. 80). Тогда

$$\angle MON = \angle MOK + \angle KON = \frac{1}{2} \angle AOK + \frac{1}{2} \angle KOB = \frac{\pi}{2}.$$

По свойству высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем $MK \cdot KN = OK^2$, т. е. произведение $MK \cdot KN$ не зависит от положения подвижной касательной.

451. Так как $n-1$ четное число, то

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k = [1^k + (n-1)^k] + [2^k + (n-2)^k] +$$

$$+ [3^k + (n-3)^k] + \cdots + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k\right].$$

Здесь $\left(\frac{n-1}{2}\right)^k$ и $\left(\frac{n+1}{2}\right)^k$ средние члены рассматриваемой суммы. Все суммы, заключенные в квадратные скобки в силу нечетности чис-

ла k делятся на суммы оснований, т. е. делятся на $1+(n-1)=2+(n-2)=3+(n-3)=\ldots=\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}=n$, что и доказывает утверждение задачи.

452. Так как первое уравнение системы можно переписать в виде

$$\log_2(y-x)=\frac{\log_2(3y-5x)}{3},$$

то данная система эквивалентна такой

$$\begin{cases}(x-y)^3=5x-3y,\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$$

Пусть $x+y=z$, $x-y=t$, $(t<0)$. Отсюда $x=\frac{z+t}{2}$, $y=\frac{z-t}{2}$. В силу введенных нами обозначений имеем

$$x^2+y^2=\frac{z^2+t^2}{2},\quad 5x-3y=z+4t,$$

или

$$\begin{cases}t^3=z+4t,\\ t^2+z^2=10.\end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы имеем $z=t^3-4t$. Подставляя $z=t^3-4t$ во второе уравнение системы, получим

$$(t^3-4t)^2+t^2=10,$$
$$t^6-8t^4+17t^2-10=0,$$
$$t^6-t^4-7t^4+7t^2+10t^2-10=0,$$
$$t^4(t^2-1)-7t^2(t^2-1)+10(t^2-1)=0,$$
$$(t^2-1)(t^4-7t^2+10)=0,$$
$$(t^2-1)\cdot(t^2-2)\cdot(t^2-5)=0.$$

Так как $t<0$, то

$$t_1=-1,\ t_2=-\sqrt{2},\ t_3=-\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$z_1=3,\ x_1=1,\ y_1=2;$$
$$z_2=2\sqrt{2},\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_2=\frac{3\sqrt{2}}{2};$$
$$z_3=-\sqrt{5},\ x_3=-\sqrt{5},\ y_3=0.$$

Отв.

$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y_2=\frac{3\sqrt{2}}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=-\sqrt{5},\\ y_3=0.\end{cases}$$

453. Из условия следует, что $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\pi-\operatorname{arctg} z$. Следовательно, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y)=\operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arctg} z)$. Но так как $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ и $\operatorname{tg}(\pi-\gamma)=-\operatorname{tg}\gamma$, то имеем $\dfrac{x+y}{1-xy}=-z$, или $x+y+z=xyz$, что и требовалось доказать.

454. Имеем очевидные неравенства

$$\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a+c},\ \frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{b+c}. \quad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим доказываемое.

455. Пусть O — центр меньшей окружности (рис. 81). Тогда $AK\parallel OC$, так как $AK\perp BK$ и $OC\perp BK$. Кроме того, $OA=OC$. Следовательно,

$$\angle KAC=\angle ACO=\angle CAO.$$

456. Среди первых 600 натуральных чисел содержится 85 чисел, делящихся на 7, так как целая часть дроби $\dfrac{600}{7}$ равна 85; чисел, делящихся на 7^2, содержится 12, так как целая часть дроби $\dfrac{600}{7^2}$ равна 12; чисел, делящихся на 7^3, содержится только одно, так как целая часть дроби $\dfrac{600}{7^3}$ равна 1. Таким образом, в число 600 входит 7 в степени $98=85+12+1$, а потому 600! не делится на 7^{99}, что и требовалось доказать.

457. Пусть $a=-3$. Тогда обычным делением получаем

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$$

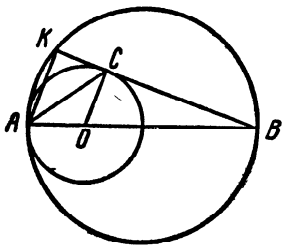

Рис. 81

Следовательно, если $a=-3$, то $x^3+y^3+z^3+axyz$ делится на $x+y+z$. Остается доказать, что при $a\neq-3$ многочлен $x^3+y^3+z^3+axyz$ не делится на $x+y+z$. Пусть данный многочлен делится на $x+y+z$. Тогда $x^3+y^3+z^3+axyz=(x+y+z)A$, где A — частное. Таким образом, при $x=-(y+z)$ многочлен должен быть равным нулю, т. е. $-(y+z)^3+y^3+z^3-ayz(y+z)=0$. После упрощений получим $(a+3)(y+z)yz=0$.

Так как это равенство должно выполняться тождественно, т. е. при всех y, z, то $a+3=0$, откуда $a=-3$. Итак, только при $a=-3$ данный многочлен делится на сумму $x+y+z$.

458. Перепишем данную систему в таком виде

$$\begin{cases} 2x\cdot 2^{x-y}+3y\cdot 2^{2x+y}=2, \\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 2^{3x+3y}=1. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения этой системы на 2^{x+2y}, а второго уравнения на —1, получим

$$\begin{cases} 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 2^{3x+3y} = 2^{x+2y+1}, \\ -2x \cdot 2^{2x+y} - 3y \cdot 2^{3x+3y} = -1. \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения этой системы, получим

$$2^{x+2y+1} - 1 = 0,$$

или

$$2^{x+2y+1} = 2^0,$$

откуда

$$x + 2y + 1 = 0$$

и

$$x = -(2y + 1).$$

Подставляя $x = -(2y+1)$ в первое уравнение системы, получаем

$$-2 \cdot (2y + 1) \cdot 2^{-3y-1} + 3y \cdot 2^{-3y-2} = 2,$$

или

$$-\frac{2y+1}{2^{3y+1}} + \frac{3y}{2^{3y+3}} = 1,$$

или

$$-8y - 4 + 3y = 2^{3y+3},$$

или

$$8^{y+1} = 1 - 5 \cdot (y + 1).$$

В этом уравнении при $y+1>0$ левая часть больше 1, а правая меньше 1; при $y+1<0$ левая часть меньше 1, а правая больше 1; при $y+1=0$ обе части равны 1. Следовательно, это уравнение выполняется лишь при $y=-1$, тогда $x=-(2y+1)=1$.

Отв. $x=1$, $y=-1$.

459. Перепишем данную систему в таком виде

$$\begin{cases} x \cdot 3^{2y-2x} + 2y \cdot 3^{-x-y} = 2^3 \cdot 3^{-2x+y}, \\ 3x \cdot 3^{2y+x} + 2y \cdot 3^{2x-y+1} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{2x-2y}. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения системы на -3^{3x}, а второго уравнения на 3^{-1}. Имеем

$$\begin{cases} -x \cdot 3^{2y+x} - 2y \cdot 3^{2x-y} = -2^3 \cdot 3^{x+y}, \\ 3x \cdot 3^{2y+x-1} + 2y \cdot 3^{2x-y} = 2^3 \cdot 3^{2x-2y+1}. \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения этой системы, получим

$$x(3^{2y+x} - 3^{2y+x}) = 2^3 (3^{2x-2y+1} - 3^{x+y}),$$

или

$$3^{2x-2y+1} - 3^{x+y} = 0.$$

Следовательно, $2x-2y+1=x+y$. Отсюда

$$x=3y-1.$$

Теперь умножим обе части первого уравнения исходной системы на 3^{x+y}. Имеем

$$x\cdot 3^{3y-x}+2y=2^3\cdot 3^{2y-x},$$

Подставив в это уравнение $x=3y-1$, получим

$$(3y-1)\cdot 3+2y=2^3\cdot 3^{1-y}.$$

Очевидно, что последнее уравнение имеет корень $y=1$. Других вещественных корней это уравнение не имеет, так как левая часть его монотонно возрастающая функция, а правая — монотонно убывающая функция. Теперь найдем значение x.

$$x=3y-1=3\cdot 1-1=2.$$

Отв. $x=2$, $y=1$.

460. Ясно, что $\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$, поскольку в противном случае третье уравнение системы потеряло бы смысл. Поэтому первые два уравнения системы можно преобразовать к виду

$$(a-1)\operatorname{tg}^2 x=1-b, \tag{1}$$

$$(b-1)\operatorname{tg}^2 y=1-a. \tag{2}$$

Но $a\neq 1$, так как если $a=1$, то из равенства (1) будем иметь $b=1$, что противоречит условию $a\neq b$. Аналогично, если $b=1$, то и $a=1$. Следовательно, равенство (1) можно почленно разделить на равенство (2). Итак, имеем

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2. \tag{3}$$

Установим также, что $a\neq 0$. В самом деле, если $a=0$, то из третьего уравнения системы получим (при $b\neq 0$) $\operatorname{tg} y=0$, т. е. $y=k\pi$; из второго уравнения тогда получим, что $b\cdot\sin\pi k=1$, т. е. $0=1$, что невозможно. На основании последнего можно из третьего уравнения получить

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) имеем $\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}$, или $a+b=2ab$.

461. Легко заметить, что имеет место тождество

$$2\operatorname{ctg} 2\varphi-\operatorname{ctg}\varphi=-\operatorname{tg}\varphi\cdot$$

Если в этом тождестве заменить последовательно φ на $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots$ $\ldots, \frac{x}{2^n}$, то получим следующие равенства:

$$2\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg} x,$$

$$2\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{4} = -\operatorname{tg}\frac{x}{4},$$

. . . . . .

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},$$

или

$$2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{4} = -\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4},$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} = -\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

Сложив почленно $(n+1)$ последних равенств, получим

$$2\operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2^n}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} = -\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} -$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},$$

откуда

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - 2\cdot\operatorname{ctg} 2x.$$

462. Доказываемое неравенство верно, если

$$\frac{2}{1+a+b} \leqslant \frac{2+a+b}{1+a+b+ab}, \quad \frac{2}{1+a+b} \leqslant \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)},$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leqslant \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a}, \quad \frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+a+b} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a},$$

что очевидно. Равенство выполняется лишь при $a=b=0$.

463. Если из a, b, c хотя бы два равны 0, то, очевидно, имеет место равенство. Пусть из чисел a, b, c хотя бы два отличны от нуля. Для определенности пусть $a \neq 0$ и один из параметров b или c отличны от нуля. Доказываемое неравенство верно, если $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2 \geqslant 0$, или

$$(b^2 - bc + c^2)\, a^2 - bc\,(b + c)\, a + b^2c^2 \geqslant 0. \qquad (1)$$

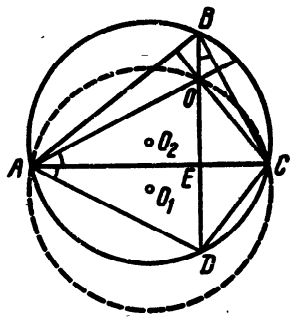

Рис. 82

Левая часть неравенства (1) представляет собой квадратный трехчлен относительно a. Его дискриминант $b^2c^2(b+c)^2 - 4b^2c^2(b^2-bc+c^2) = b^2c^2[b^2+c^2+2bc)^2 - 4b^2+4bc-4c^2] = b^2c^2(6bc-3b^2-3c^2) = -3b^2c^2(b-c)^2 \leqslant 0$.

Учитывая, что коэффициент b^2-bc+c^2 при a^2 положителен, заключаем, что неравенство (1) имеет место при любых a. Следовательно, и доказываемое неравенство верно.

Равенство достигается при $a=b=c$ или в случае равенства нулю хотя бы двух из параметров a, b, c.

Эту задачу можно решить иначе. Имеем

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{2}[(a^2b^2 + b^2c^2) + (a^2b^2 + a^2c^2) +$$

$$+ (b^2c^2 + a^2c^2)] \geqslant \frac{1}{2}(2\,ab^2c + 2\,a^2bc + 2\,abc^2) = abc\,(a + b + c).$$

Последнее доказательство основано на том, что $x^2+y^2 \geqslant 2xy$.

464. Пусть O_2 — окружность, описанная около треугольника ABC, а O_1 — окружность, описанная около треугольника OAC, где O — ортоцентр треугольника ABC (рис. 82). Продолжим высоту OE до пересечения в точке D с окружностью O_2.

$$\angle DAC = \angle DBC, \qquad (1)$$

так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу DC окружности O_2;

$$\angle DBC = \angle OAC, \qquad (2)$$

как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Из (1) и (2) заключаем, что

$$\angle OAE = \angle DAE,$$

а следовательно, прямоугольные треугольники OAE и DAE равны, а также равны треугольники OAC и DAC. Поэтому и окружности O_2 и O_1, описанные около треугольников OAC и DAC, равны. Итак, мы доказали, что окружность, проходящая через O, A, C, равна окружности O_2.

Аналогично доказывается, что окружности, проходящие через O, A, B и O, B, C, равны окружности O_2.

465. Из произвольной точки P проводим к окружности касательные PA и PB (рис. 83). Пусть D — точка пересечения отрезка PO (O — центр круга) с окружностью. Очевидно, что касательная MN, проведенная к окружности в точке D, перпендикулярна OP. Итак, треугольник MDP прямоугольный, а потому $MD<MP$. Но так как $AM=MD$, то $AM<MP$, т. е. точка M, принадлежащая AP, расположена ближе к точке A, чем к точке P. Теперь ясно, что отрезок, соединяющий середины касательных, не имеет с окружностью ни одной общей точки, что и требовалось доказать.

466. Пусть

$$f(x, y) = (x - y)\,Q(x, y), \tag{1}$$

где $Q(x, y)$ — некоторый многочлен. Равенство (1) есть тождество, т. е. оно имеет место при любых значениях x и y. В силу симметрич-

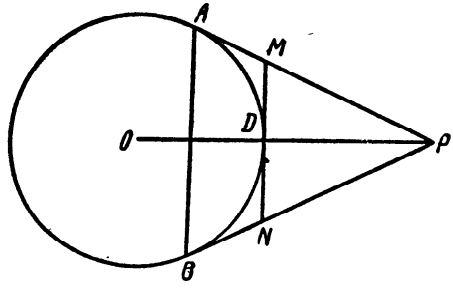

Рис. 83

ности $f(x, y)$ относительно x и y в равенстве (1) можно x и y поменять местами. Следовательно,

$$f(x, y) = (y - x)\,Q(y, x). \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$(x - y)\,Q(x, y) = (y - x)\,Q(y, x).$$

Поделив обе части этого равенства на $x-y$, получаем

$$Q(x, y) = -Q(y, x)$$

При $x=y$ имеем

$$Q(y, y) = -Q(y, y), \text{ или } Q(y, y) = 0.$$

Это показывает, что многочлен $Q(x, y)$ обращается в нуль при замене x на y, следовательно, он делится на $x-y$, т. е.

$$Q(x, y) = (x - y)\,Q_1(x, y).$$

В силу последнего равенства и равенства (2) получаем

$$f(x, y) = (x - y)^2\,Q_1(x, y),$$

что и требовалось доказать.

467. Так как $x^2 \geqslant 0$, $|x-5| \geqslant 0$, $|x^2-4x| \geqslant 0$, то левая часть решаемого неравенства определена для любого действительного x. По-

сколько $0=\log_3 1$ и логарифмическая функция при основании, большем 1, возрастающая, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1. \qquad (1)$$

В силу того, что $x^2+|x-5|>0$ при любом значении x, то неравенство (1) равносильно такому

$$|x| \cdot |x-4|+3 \geqslant x^2+|x-5|. \qquad (2)$$

Если $x \leqslant 0$, то неравенство (2) принимает следующий вид:

$$-x(4-x)+3 \geqslant x^2-x+5,$$

откуда $x \leqslant -\frac{2}{3}$. Из системы неравенств $x \leqslant 0$, $x \leqslant -\frac{2}{3}$ заключаем, что все x из промежутка $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ служат решениями данного неравенства.

Если $0<x \leqslant 4$, то неравенство (2) перепишется в таком виде

$$x(4-x)+3 \geqslant x^2-(x-5),$$

или

$$2x^2-5x+2 \leqslant 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2.$$

Из системы неравенств $0<x \leqslant 4$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ заключаем, что решениями данного неравенства служат все числа из промежутка $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Если $4<x \leqslant 5$, то неравенство (2) принимает вид

$$x(x-4)+3 \geqslant x^2-(x-5),$$

откуда $x \leqslant -\frac{2}{3}$. Поскольку неравенства $x \leqslant -\frac{2}{3}$ и $4<x \leqslant 5$ несовместны, то все числа из промежутка (4, 5] не являются решениями данного неравенства.

Если $x>5$, то решаемое неравенство перепишется так:

$$x(x-4)+3 \geqslant x^2+x-5,$$

откуда $x \leqslant 1\frac{3}{5}$. Так как неравенства $x \leqslant 1\frac{3}{5}$ и $x>5$ противоречивы, то все числа из промежутка $(5, \infty)$ не служат решениями данного неравенства. Таким образом, всеми решениями данного неравенства являются все x, удовлетворяющие условию:

$$x \leqslant -\frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$$

Отв. $x \leqslant -\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

468. Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, то данное уравнение выполняется, когда одновременно выполняются два уравнения $\sin 5x = 1$ и $\sin 7x = -1$.

Из первого уравнения имеем

$$x = \frac{\pi}{10}(4k + 1),$$

а из второго

$$x = \frac{\pi}{14}(4n + 3).$$

Таким образом, должно быть

$$\frac{4k + 1}{5} = \frac{4n + 3}{7},$$

или

$$7k = 5n + 2,$$

откуда

$$k = \frac{5n + 2}{7} = \frac{7n - 2n + 2}{7} = n - 2 \cdot \frac{n - 1}{7}.$$

Для того чтобы k было целым, необходимо, чтобы $n-1$ было кратно 7, т. е. $n-1 = 7m$, или $n = 7m + 1$. Итак,

$$x = \frac{\pi}{14} \cdot (4n + 3) = \frac{\pi}{14}[4(7m + 1) + 3] = \frac{\pi}{2}(4m + 1).$$

Решения данного уравнения выражаются формулой

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot (4m + 1), \text{ где } m = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots.$$

469. Поскольку, по условию, $a > b$, то $a - b > 0$. Пусть $a - b = c > 0$, откуда $a = b + c$. Таким образом, доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt[n]{b + c} < \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}. \qquad (1)$$

Так как обе части неравенства (1) положительны, то неравенство (1) верно, если $\left(\sqrt[n]{b + c}\right)^n < \left(\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}\right)^n$, или $b + c < b + c + M$, что очевидно, так как $M > 0$. Следовательно, неравенство (1) верно, а потому верно и утверждение задачи.

470. Пусть BD биссектриса угла треугольника ABC и пусть точки O_1 и O_2 — центры вписанных равных кругов в треугольники ABD и CBD (рис. 84). Обозначим через E и F точки касания окружностей O_1 и O_2 с прямой BD. Прямоугольные треугольники O_1BE и O_2BF равны, так как у них равные катеты O_1E и O_2F и противоположные им острые углы также равны между собой, как половины равных углов. Следовательно, $BE = BF$, т. е. точки E и F совпадают. Таким образом, BE является биссектрисой и высотой треугольника

O_1BO_2, а потому треугольник O_1BO_2 равнобедренный. Так как точки O_1 и O_2 равноудалены от прямой AC, то прямая O_1O_2 параллельна AC. Значит, биссектриса BD перпендикулярна AC, а потому треугольник ABC равнобедренный, что и требовалось доказать.

471. Вначале заметим, что при $n=0$ данная дробь равна $\frac{3}{7}$ и не сократима. Если бы дробь $\frac{2n+3}{5n+7}$ была сократима при каком-нибудь целом n, то была бы сократима и дробь $\frac{5n+7}{2n+3} = 2+\frac{n+1}{2n+3}$. Но тогда была бы сократимой и дробь $\frac{2n+3}{n+1} = 2+\frac{1}{n+1}$. Но из последнего следует, что дробь $\frac{1}{n+1}$ сократима, а этого не может быть. Таким образом, дробь $\frac{2n+3}{5n+7}$ не сократима ни при каком целом n.

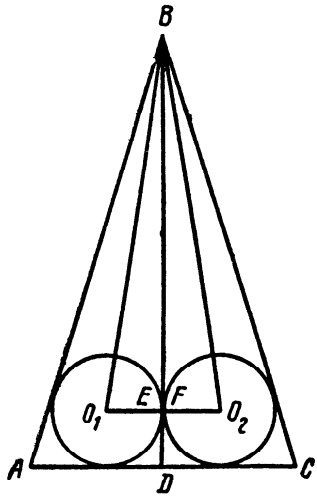

Рис. 84

472. Так как $p-1$ делится на q, то ясно, что $p-1 \geqslant q$, т. е. $p \geqslant q+1$, а потому $p>q-1$. Далее, $q^3-1 = (q-1)(1+q+q^2)$ делится на p, но $q-1$ не делится на p и, следовательно, на p делится $1+q+q^2$, т. е. $1+q+q^2=k\cdot p$, где k — целое число. Таким образом, для доказательства, что $1+q+q^2=p$, надо доказать, что $k=1$. Докажем последнее. Равенство $1+q+q^2=kp$ перепишем в виде $q+q^2=kp-1$, или $q(q+1)=kp-1$. Поскольку $p \geqslant q+1$, то $k \leqslant q$, в противном случае было бы $kp-1 \geqslant (q+1)^2-1 > q(q+1)$.

Наконец, преобразуем равенство $q(q+1)=kp-1$ к виду $q(q+1)-k(p-1)=k-1$. Левая часть последнего равенства делится на q, значит, и правая должна делиться на q. Но $k-1<q$, а потому $k-1=0$, т. е. $k=1$, что и требовалось доказать.

473. Так как только положительные числа имеют логарифмы, то должно быть $\sin x>0$, т. е. должно иметь место соотношение

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi.$$

Если $0<a<1$, то $\log_a \sin x \geqslant 0$, так как $0<\sin x \leqslant 1$. Следовательно, в данном случае для решаемого уравнения следует взять только неотрицательный корень, а именно

$$\log_a \sin x = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2},$$

откуда

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}}$$

Если же $a>1$, то $\log_a \sin x \leqslant 0$, а следовательно, в данном случае следует взять только отрицательный корень решаемого уравнения, а именно

$$\log_a \sin x = -\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2},$$

откуда

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin a^{-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}}.$$

Отв.

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}}, \quad \text{если } 0 < a < 1$$

и

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin a^{-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}}, \quad \text{если } a > 1.$$

474. Имеем $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x}$. Поэтому данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1.$$

Умножив обе части уравнения на $1+\log_2 x$, перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители

$$\left(\log_2 x - 1\right)\left(\log_2^4 x + 2\log_2^3 x + \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1\right) = 0.$$

Второй из сомножителей при $x>1$, очевидно, положителен и, значит, в нуль не обращается ни при каком $x>1$. Итак, $\log_2 x - 1 = 0$, откуда $x=2$. Итак, при $x>1$ данное уравнение имеет единственный корень, равный 2.

475. Перепишем данное уравнение последовательно так

$$(2\cos x - 3\operatorname{tg} x) + (4\sin x - 2) = 0,$$

$$\frac{2\cos^2 x - 3\sin x}{\cos x} + 2(2\sin x - 1) = 0,$$

$$\frac{2 - 2\sin^2 x - 3\sin x}{\cos x} + 2(2\sin x - 1) = 0,$$

$$2(2\sin x - 1) - \frac{(2\sin x - 1)\cdot(\sin x + 2)}{\cos x} = 0,$$

$$(2\sin x - 1)\cdot\left(2 - \frac{\sin x + 2}{\cos x}\right) = 0. \qquad (1)$$

Так как значение $\cos x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению, то уравнение (1) можно представить в виде

$$(2\sin x - 1)(2\cos x - \sin x - 2) = 0.$$

Следовательно, решаемое уравнение распадается на два уравнения:

$$2\sin x - 1 = 0 \text{ и } 2\cos x - \sin x - 2 = 0.$$

Из первого уравнения получаем $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Второе уравнение перепишется последовательно в виде

$$\sin x + 2(1 - \cos x) = 0,$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\sin^2\frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Последнее уравнение в свою очередь также распадается на два уравнения

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \text{ и } \cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} = 0.$$

Из первого уравнения получаем

$$x = 2k\pi,$$

а второе уравнение перепишем так: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = 2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Отв.

$$x_1 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x_2 = 2k\pi, \quad x_3 = 2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

476. Данное уравнение можно переписать в виде

$$(\cos x + \sin x)^2 - \operatorname{tg} x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

или

$$(\cos x + \sin x)[\cos x + \sin x - \operatorname{tg} x \cdot (\cos x - \sin x)] = 0.$$

Это уравнение распадается на два

$$\cos x + \sin x = 0 \text{ и } \cos x + \sin x - \operatorname{tg} x \cdot (\cos x - \sin x) = 0.$$

Из первого уравнения получаем $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Второе уравнение перепишется так

$$\cos x + \sin x - \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0,$$

или

$$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0,$$

или

$$\frac{1}{\cos x} = 0,$$

которое не имеет решений.

Отв. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, где $k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots$

477. Имеем $\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n = a + b + \cdots > c = \left(\sqrt[n]{c}\right)^n$, откуда $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}$.

478. Первое решение. Возведя $(1+x)$ и $(1-x)$ в n-ю степень по биному Ньютона, получим

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2\left(1 + C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 + \cdots\right) < 2\left(1 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots\right). \quad (1)$$

Поскольку сумма коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении бинома, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах, а сумма всех коэффициентов равна 2^n, то

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = \frac{2^n}{2}.$$

Отсюда следует, что $(1+x)^n + (1-x)^n < 2 \cdot \frac{2^n}{2} = 2^n$. Это доказательство проведено для $n \geqslant 2$. Если же $n = 1$, то имеет место равенство.

Второе решение. Имеем $0 < \frac{1+x}{2} < 1$, $0 < \frac{1-x}{2} < 1$ и поэтому

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1+x}{2}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1-x}{2}. \quad (2)$$

Сложив неравенства (1) и (2), получим $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n + \left(\frac{1-x}{2}\right)^n \leqslant 1$, или $(1+x)^n + (1-x)^n \leqslant 2^n$. Равенство достигается лишь при $n = 1$.

479. Пусть одна из окружностей касается стороны AB прямоугольника $ABCD$ в точке F, а диагонали в точке M, а другая окружность касается стороны AD в точке E, а диагонали в точке N (рис. 85). Имеем $AF=AM$ и $AE=AN$, как касательные, проведенные из одной точки к окружности. Также имеем $AD=AE+r$, $AB=AF+r$, где r — радиус каждой из окружностей. Таким образом, искомое расстояние

$$MN = AN - AM = AE - AF =$$

$$= (AD - r) - (AB - r) = AD - AB = |a - b|.$$

Наконец, заметим, что если прямоугольник — квадрат, то $a=b$ и $a-b=0$, т. е. вписанные окружности касаются диагонали в одной точке.

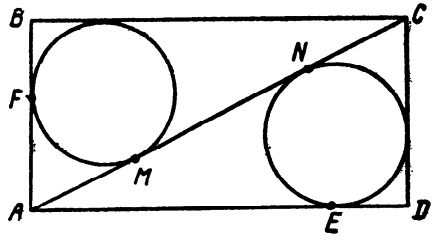

Рис. 85

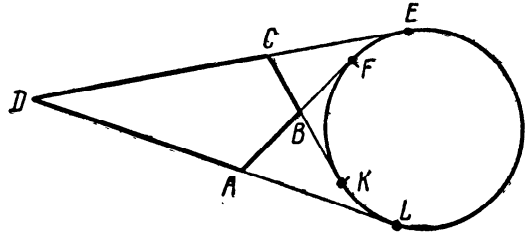

Рис. 86

480. Пусть прямые CD, AB, BC, AD касаются окружности соответственно в точках E, F, K, L (рис. 86). Имеем $DE=DL$, $CE=CK$, $AL=AF$, как касательные, проведенные из одной точки к окружности. Из этих равенств получаем

$$DE - AF = DL - AL = AD,$$

$$\text{или } AD = DE - AF = DC + EC - AB - BF = (DC - AB) +$$

$$+ CE - BF = (DC - AB) + CK - BK = (DC - AB) + BC.$$

Итак, $AD=CD-AB+BC$, откуда следует утверждение задачи.

481. Имеем $N = 2(a-1)(a-1)^n - (2-a)^n = (2a-2)(a-1)^n - (2-a)^n = (2a-3)(a-1)^n + [(a-1)^n - (2-a)^n]$.

Поскольку $(2a-3)(a-1)^n$ делится на $2a-3$, а также $[(a-1)^n-(2-a)^n]$ делится на $[(a-1)-(2-a)]=2a-3$, как разность одинаковых степеней двух чисел, то число N тоже делится на $2a-3$.

482. Разделим почленно доказываемые неравенства на $k!$. Получим

$$(k+1)^{n-k} \leqslant \frac{n!}{k!} \leqslant n^{n-k}. \qquad (1)$$

Если $n=k$, то все три члена неравенства (1) равны. Точно так же, если $n=k+1$, все три члена неравенства (1) равны.

Если же $n \neq k$ и $n \neq k+1$, то докажем, что

$$(k+1)^{n-k} < \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k\cdot(k+1)\cdots(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} < n^{n-k}, \text{ или}$$

$$\underbrace{(k+1)\cdot(k+1)\cdots(k+1)}_{(n-k)\text{ раз}} < \underbrace{(k+1)\cdot(k+2)\cdots(n-1)\cdot n}_{(n-k)\text{ сомножителей}} <$$

$$< \underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{(n-k)\text{ раз}}. \qquad (2)$$

Поскольку все сомножители произведения $(k+1)(k+2)\ldots(n-1)n$, кроме первого, больше $k+1$ и каждый из этих сомножителей, кроме последнего, меньше n, то неравенства (2) верны при условии, что $n \neq k$ и $n \neq k+1$.

483.

1) Если $0<a<1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{1+a^x} = \lim_{x\to\infty} a^x \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+a^x} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

2) Если $a=1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

3) Если $a>1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{a^x}+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$.

484. Соединим отрезками центр O круга с точками M, N и D, где D — точка касания MN с окружностью (рис. 87). Поскольку прямоугольные треугольники OMA и ODM равны (по трем сторонам), то углы OMA и OMD равны между собой. Из таких же соображений углы ONB и OND также равны между собой. Сумма углов AMD и BND равна 180°, как сумма внутренних односторонних углов при параллельных AM и BN и секущей MN. Поэтому сумма половин этих углов OMD и OND равна 90°. Следо-

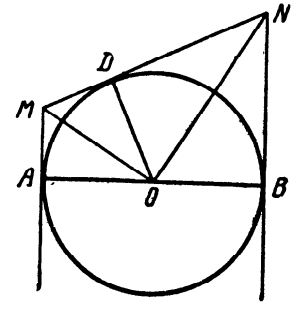

Рис. 87

вательно, треугольник MON — прямоугольный. По известной теореме имеем $OD^2=MD\cdot ND$. Но так как $MD=AM$ и $ND=BN$, как касательные, проведенные из одной точки, то $AM\cdot BN=R^2$.

485. На рис. 88 показана призма $ABCA_1B_1C_1$, соответствующая условию задачи.

Так как основание призмы — правильный треугольник, то $AO\perp BC$ (O — центр основания призмы). Следовательно, $AA_1\perp BC$, т. е. BB_1C_1C — прямоугольник. Пусть FDE — перпендикулярное сечение призмы, проходящее через центр вписанного шара. Пусть r — радиус

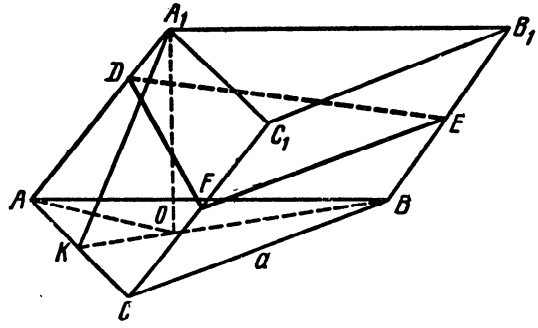

Рис. 88

шара, $AA_1=x$, $A_1O=H$ — высота призмы. Так как вписанный шар касается и оснований призмы, то $H=2r$. Объем призмы $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2r=\frac{a^2r\sqrt{3}}{2}$. С другой стороны, $V=p\cdot r\cdot x$, где $2p$ — периметр треугольника DEF (радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в треугольник DEF). Поэтому

$$\frac{a^2r\sqrt{3}}{2}=prx,$$

т. е.

$$a^2\sqrt{3}=2px. \qquad (1)$$

Пусть A_1K — высота грани AA_1C_1C. Имеем

$$AA_1\cdot DF=AC\cdot A_1K.$$

Следовательно,

$$DF=\frac{AC\cdot A_1K}{AA_1}=\frac{a\cdot\sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}}}{x}=\frac{a\sqrt{4x^2-a^2}}{2x}.$$

Поскольку $DF=DE$, то $2p=a+\frac{a\sqrt{4x^2-a^2}}{x}$,

или

$$2px = a\left(x + \sqrt{4x^2 - a^2}\right). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$a^2\sqrt{3} = a\left(x + \sqrt{4x^2 - a^2}\right),$$

или

$$3x^2 + 2ax\sqrt{3} - 4a^2 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{3}}$.

Отв. $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}a$.

486. Пусть α и β — корни многочлена $f(x)$. Так как $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$, то $\alpha^3=1$ и $\beta^3=1$ (α и β — мнимые числа). Для делимости $F(x)$ на $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $F(\alpha)=0$ и $F(\beta)=0$. Имеем $F(\alpha)=\alpha^{991}+\alpha^{344}+1=(\alpha^3)^{330}\cdot\alpha+(\alpha^3)^{114}\cdot\alpha^2+1 = 1^{330}\cdot\alpha+1^{114}\cdot\alpha^2+1=\alpha^2+\alpha+1=0$, так как α — корень многочлена $f(x)=x^2+x+1$. Аналогично доказывается, что $F(\beta)=0$. Следовательно, $F(x)$ делится на $f(x)$, что и требовалось доказать.

487. Из трех последовательных целых чисел $(n-2)$, $(n-1)$ и n одно делится на 3 и, по крайней мере, одно делится на 2. Поэтому один из сомножителей делимого имеет вид $[(x^3)^k-1]$ и, следовательно, делится на (x^3-1); каждый из остальных сомножителей делится на $(x-1)$ и, хотя бы, один из трех сомножителей делимого делится на $(x+1)$. Поэтому $F(x)$ делится на $f(x)$.

488. Имеем $(\sqrt[3]{b}-a)^2>0$, или $\sqrt[3]{b^2}+a^2>2a\sqrt[3]{b}$. Из условия следует, что $\sqrt[3]{b^2}-a^2>0$. Поэтому $\sqrt[3]{b^4}-a^4>2a\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{b^2}-a^2\right)$. Отсюда $\sqrt[3]{b}\cdot(b+2a^3)>a(a^3+2b)$, или

$$\sqrt[3]{b} > \frac{a(a^3+2b)}{2a^3+b}. \qquad (1)$$

Аналогично,

$$\left[\sqrt[3]{b}-(a+1)\right]^2 > 0, \quad \sqrt[3]{b^2}+(a+1)^2 > 2(a+1)\sqrt[3]{b},$$

$$\sqrt[3]{b^2}-(a+1)^2 < 0.$$

Следовательно,

$$b\sqrt[3]{b}-(a+1)^4 < 2(a+1)b-2(a+1)^3\cdot\sqrt[3]{b}.$$

Отсюда

$$\sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)[(a+1)^3+2b]}{2(a+1)^3+b}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение задачи.

489. Первое решение. Доказываемое неравенство верно, если $\frac{n!}{2^n} \geqslant \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, но $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \times$ $\times \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{2} > \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{2}$. Равенство достигается лишь при $n=1$ и при $n=2$.

Второе решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n}_{(n-1) \text{ раз}} \geqslant \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}_{(n-1) \text{ раз}}$, что очевидно, так как все сомножители левой части неравенства, кроме первого, больше 2.

490. 1) Если $0<a<1$, то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

2) Если $a = 1$, то $\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0.$

3) Если $a > 1$, то $\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{a^{2x}}}{1 + \frac{1}{a^{2x}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$

491. Имеем

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} = \frac{m}{n},$$

что очевидно.

492. Даны прямая EF и точки A и B, лежащие по одну сторону от нее (рис. 89).

Через точку A_1, симметричную точке A относительно EF, и точку B проводим прямую, которая пересекает EF в точке M.

Докажем, что точка M является искомой.

Предположим, что другая точка M_1 прямой EF — искомая.

На рис. 89 видим, что

$$AM + BM = A_1M + BM = A_1B,$$

$$AM_1 + BM_1 = A_1M_1 + BM_1 > A_1B.$$

Из этих двух соотношений заключаем, что

$$AM + BM < AM_1 + BM_1,$$

т. е. точка M является искомой.

493. Пусть C (рис. 90) есть некоторая точка прямой a. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно a, тогда $CA = CA_1$. Следовательно, при любом положении точки C будет иметь место

$CB-CA=CB-CA_1$. Если треугольник CA_1B существует, то $CB-CA_1<A_1B$. Когда точка C совпадает с точкой D (D — точка пересечения a с BA_1), разность $DB-DA_1$ делается равной A_1B. Это и есть наибольшая величина рассматриваемой разности.

Отсюда вытекает и построение: отражаем точку A относительно прямой a в точку A_1. Потом проводим прямую BA_1 до пересечения в точке D с прямой a. Точка D является искомой.

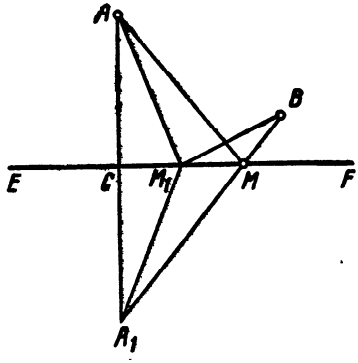

Рис. 89

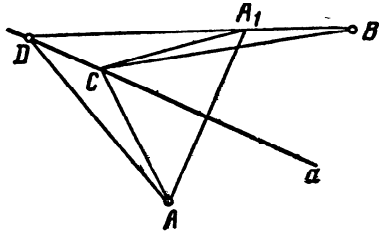

Рис. 90

494. Введем обозначения: a — сторона основания призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 91), H — длина бокового ребра призмы, S — площадь основания призмы. В силу наших обозначений объем призмы $V=S\cdot H$. Пусть EN — средняя линия треугольника ABC. Так как точки E и M принадлежат плоскости ABC, то прямая ME пересекает BC в некоторой точке D. Из подобия треугольников BMD и NED следует, что $\frac{BD}{ND}=\frac{BM}{NE}$. Поскольку сторона основания нами обозначена через a, то имеем $BN=NE=\frac{a}{2}$, $BM=2a$, $ND=BD-BN=BD-\frac{a}{2}$. Таким образом,

$$\frac{BD}{BD-\frac{a}{2}}=\frac{2a}{\frac{a}{2}}.$$

Отсюда получаем $BD=\frac{2a}{3}$. Следовательно, точка D делит ребро BC в отношении 2 : 1. Пусть прямая MB_1 пересекает AA_1 в точке K. Очевидно, что K — середина AA_1. Таким образом, сечение B_1DEK разбило данную призму на два многогранника $ABDEB_1K$ и $A_1B_1C_1DEK$, отношение объемов которых надо определить. Объем V_1 многогранника $ABDEB_1K$ равен разности объемов треугольных пирамид B_1BDM и $KAME$. Объем пирамиды B_1BDM

$$V_2=\frac{1}{3}BB_1\cdot S_1, \qquad (1)$$

где S_1 — площадь треугольника BDM. Так как точка D делит BC в отношении 2 : 1, то высота треугольника BDM, опущенная из точки D на AB, равна 2/3 высоты h треугольника ABC. Следовательно,

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2h}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{ah}{2} = \frac{4}{3} S. \qquad (2)$$

Таким образом,

$$V_2 = \frac{H}{3} \cdot \frac{4S}{3} = \frac{4}{9} V.$$

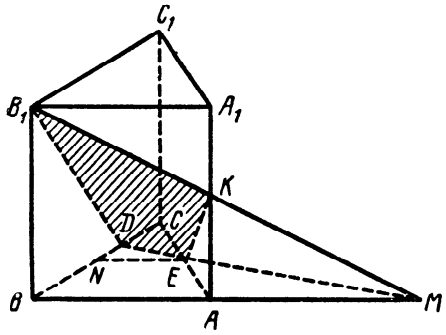

Рис. 91

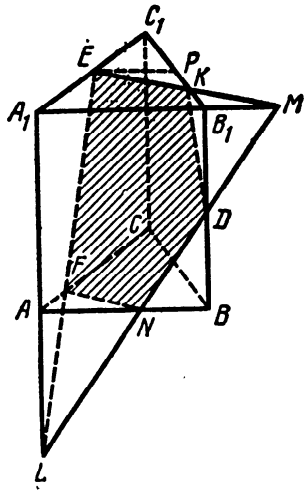

Рис. 92

Поскольку площадь треугольника AEM

$$S_2 = \frac{1}{2} AM \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot S \quad \text{и} \quad AK = \frac{H}{2},$$

то объем пирамиды $KAME$

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{S}{2} = \frac{V}{12}.$$

Итак, $V_1 = V_2 - V_3 = \frac{13}{36} V$, а потому сечение делит объем данной призмы в отношении 13 : 23.

Отв. 13 : 23.

495. Пусть EP — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 92). Поскольку E и M принадлежат плоскости $A_1B_1C_1$, то прямая EM пересекает ребро B_1C_1 в некоторой точке K. Очевидно, что треугольники EPK и KB_1M равны между собой. Из равенства этих треугольников следует, что $KB_1 = PK$, а потому $B_1K = \frac{1}{4} B_1C_1$. Следовательно, плоскость сечения пересекает ребро B_1C_1 в точке K, которая делит это ребро в отношении 3 : 1. Середина D ребра BB_1 и точка M принадлежат плоскости ABB_1A_1; поэтому прямая MD пересекает ребро

AB в некоторой точке N, а продолжение ребра A_1A — в некоторой точке L. Легко убедиться, что точка N — середина ребра AB, а точка L удалена от точки A на половину ребра AA_1, т. е. $AL=\frac{1}{2}AA_1$ и $LA_1=\frac{3}{2}AA_1$. Так как точки L и E принадлежат плоскости ACC_1A_1, то прямая EL пересекает ребро AC в некоторой точке F. Из подобия треугольников LAF и LA_1E следует, что

$$AF=\frac{A_1E}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{6}A_1C_1.$$

Отсюда следует, что точка F делит ребро AC в отношении 1 : 5. Таким образом, сечением призмы секущей плоскостью является пятиугольник $NFEKD$. Выразим объем многогранника EA_1AFNDK через объем V данной призмы. Объем этого многогранника можно рассматривать как разность объема пирамиды LA_1EM и суммы объемов пирамид $LAFN$ и DKB_1M. Пусть боковые ребра данной призмы равны H, а площадь основания призмы S. Значит, объем призмы $V=S\cdot H$. Так как LA_1 перпендикулярна плоскости A_1EM, то LA_1 является высотой пирамиды LA_1EM и $LA_1=\frac{3H}{2}$. Легко заметить, что площадь треугольника A_1EM равна площади трапеции A_1B_1PE, т. е. равна $\frac{3}{4}S$. Поэтому объем V_1 пирамиды LA_1EM равен $V_1=\frac{1}{3}LA_1\cdot S_{A_1EM}=\frac{3}{8}V$. Так как $AF=\frac{1}{6}AC$, то высота треугольника AFN равна 1/6 высоты треугольника ACB. Также, зная, что $AN=\frac{AB}{2}$, имеем

$$S_{AFN}=\frac{1}{12}S.$$

Далее, поскольку AL перпендикулярно плоскости AFN и так как $AL=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}H$, то получаем объем пирамиды $LAFN$

$$V_2=\frac{1}{3}AL\cdot S_{AFN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{S}{12}=\frac{1}{72}V.$$

Так как точка D — середина ребра BB_1 и BB_1 перпендикулярно плоскости KB_1M, то высота пирамиды DB_1KM равна $B_1D=\frac{H}{2}$. Площадь треугольника B_1MK равна $\frac{1}{8}S$. Следовательно, объем пирамиды DB_1KM

$$V_3=\frac{1}{3}B_1D\cdot S_{B_1MK}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{S}{8}=\frac{1}{48}V.$$

Объем многогранника EA_1AFNDK

$$V_4 = V_1 - V_2 - V_3 = \frac{3V}{8} - \frac{V}{72} - \frac{V}{48} = \frac{49}{144} V.$$

Следовательно, сечение делит объем призмы в отношении 49 : 95.

Отв. 49 : 95.

496. Записав числа A, B и C в десятичной системе, будем иметь

$$A + B + C + 7 = 4 \cdot (1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{2m-1}) +$$
$$+ 2 \cdot (1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^m) + 8 \cdot (1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{m-1}) + 7 =$$
$$= \frac{4 \cdot (10^{2m} - 1)}{9} + \frac{2 (10^{m+1} - 1)}{9} + \frac{8 \cdot (10^m - 1)}{9} + 7 =$$
$$= \frac{1}{9} (4 \cdot 10^{2m} + 2 \cdot 10^{m+1} + 8 \cdot 10^m - 4 - 2 - 8 + 63) =$$
$$= \frac{1}{9} (4 \cdot 10^{2m} + 28 \cdot 10^m + 49) = \left(\frac{2 \cdot 10^m + 7}{3} \right)^2.$$

Число $\left(\frac{2 \cdot 10^m + 7}{3} \right)^2$ — целое как сумма целых чисел. Следовательно, число $A+B+C+7$ является квадратом целого числа.

497. Обозначим $\sqrt[n]{n} = 1 + z$, где $z > 0$. Из этого равенства следует

$$n = (1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n (n - 1)}{2} z^2 + \cdots + z^n.$$

$$n > 1 + \frac{n (n - 1)}{2} z^2, \text{ или}$$

$$z^2 < \frac{2}{n}.$$

Отсюда

$$z^2 < \frac{2}{n - 1}. \qquad (1)$$

Поскольку, по условию, $n > 2$, то

$$\frac{2}{n - 1} < \frac{4}{n}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $z^2 < \frac{4}{n}$, т. е. $0 < z < \frac{2}{\sqrt{n}}$. Но так как $z = \sqrt[n]{n} - 1$, то $\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$, или $\sqrt[n]{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1$.

498. Имеем $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+1=1+n+$

$+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)+\ldots+1.$

Но $1+n+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)+\ldots+1=1+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}+\ldots+1>\frac{n^2}{2}$.

Отсюда следует, что

$$2^n>\frac{n^2}{2} \text{ и } 0<\frac{1}{2^n}<\frac{2}{n^2}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на n, получим

$0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n}$, отсюда $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

499. На стороне AC треугольника ABC (рис. 93) возьмем три точки: вершины A и C и произвольную точку M между ними. Если $\angle A=\angle C$, то сумма расстояний любой точки отрезка AC до сторон AB и BC равна высоте AN.

Пусть $\angle A\neq\angle C$. Для определенности пусть угол A больше угла C, тогда расстояние AN от A до стороны BC будет меньше, чем расстояние CL от C до стороны AB. Остается сравнить сумму расстояний $MF+ME$ от точки M до сторон BC и AB с AN.

Из точки M опустим перпендикуляр MK на AN. Из рис. 93 видим, что достаточно сравнить отрезки AK и ME, так как $KN=MF$.

Катет AK меньше катета ME, так как прямоугольные треугольники AKM и AEM имеют общую гипотенузу и угол EAM больше угла KMA $(=BCA)$.

Итак,

$$AK+KN<MF+ME,$$

или

$$AN<MF+ME,$$

т. е. вершина A большего угла при AC является искомой точкой.

500. Пусть дана пирамида $ABCD$ (рис. 94), у которой плоские углы при вершине A прямые, т. е. $\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=90°$. Если обозначим центр шара, описанного около данной пирамиды, через O, то точка O является точкой пересечения всех плоскостей, проведенных через середины всех ребер пирамиды перпендикулярно этим ребрам. Отсюда также следует, что отрезки, соединяющие точку O с серединами ребер AB, AC и AD, перпендикулярны этим ребрам. Нам надо доказать, что прямая OA пересекает плоскость треугольника BCD в точке пересечения медиан этого треугольника. На продолжении AO отложим отрезок $OP=AO$, $(AP=2AO)$. Через точку P проведем плоскость, перпендикулярную ребру AB. Эта плоскость пересекает ребро AB в некоторой точке M, причем PM будет перпендикулярен ребру AB. Далее, пусть F — середина AB, тогда

$OF \perp AB$. Итак, мы видим, что треугольники AOF и APM прямоугольные и имеют один общий острый угол, а потому они подобны. Из подобия этих треугольников следует, что $AM=2AF$, т. е. $AM=AB$. Следовательно, точки M и B совпадают. Таким же образом убеждаемся, что плоскости, проходящие через точку P перпендикулярно ребрам AC и AD, пересекают эти ребра в точках C и D. Итак, у нас образовался прямоугольный параллелепипед $ABA_1CDB_1PC_1$, диагональ которого есть AP. Диагональ AP принадлежит плоскости $ADPA_1$. Эта плоскость пересекает BC в его середине, так как диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам. Следовательно, плоскость

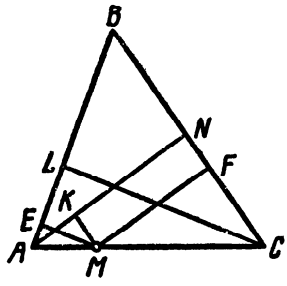

Рис. 93

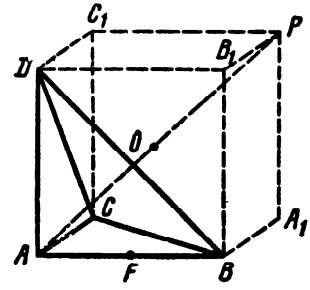

Рис. 94

$ADPA_1$ пересекает плоскость BCD по прямой, соединяющей точку D с серединой отрезка BC, т. е. по медиане треугольника BCD. Значит, точка пересечения диагонали AP с плоскостью треугольника BCD лежит на одной медиане этого треугольника. Таким же образом можно убедиться, что точка пересечения диагонали AP с плоскостью треугольника BCD лежит и на другой медиане этого треугольника. Итак, доказано, что точка пересечения диагонали AP с плоскостью треугольника BCD лежит на пересечении медиан этого треугольника Этим завершается доказательство.

501. Должно быть $x^4+x^3+x^2+ax+b=(x^2+Ax+B)^2$, или x^4+x^3+ $+x^2+ax+b=x^4+2Ax^3+(A^2+2B)x^2+2ABx+B^2$. Так как это равенство — тождество, то коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны, т. е.

$$2A=1, \quad A^2+2B=1, \quad 2AB=a, \quad B^2=b.$$

Из этой системы равенств находим

$$a=\frac{3}{8}, \quad b=\frac{9}{64}.$$

502. Предположим, что $\sqrt[3]{2}=m+\sqrt{n}$. Тогда $2=m^3+3mn+$ $+(3m^2+n)\sqrt{n}$. Поскольку 2 — рационально, то и правая часть последнего равенства должна быть рациональной. Последнее возможно лишь тогда, когда $3m^2+n=0$, что невозможно, так как $3m^2\geqslant 0$, а $n>0$. Следовательно, утверждение задачи верно.

503. Имеем

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n}=1+\frac{x^n(1-x)}{1-x^n}=1+\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^n}}.$$

Так как $0<x<1$, то каждая из дробей $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^n}$ больше 1. Следовательно, сумма этих дробей больше n, а потому $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^n}}<\frac{1}{n}$. Итак,

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n}<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},$$

откуда

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}.$$

504. Имеем $\left(x+\frac{1}{nx}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)=(x-1)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}-1\right)=$ $=\frac{1}{x}\cdot(x-1)\left(x-\frac{1}{n}\right)$. Если $n>1$ и $x>1$, то $x-1>0$ и $x-\frac{1}{n}>0$, а следовательно, рассматриваемая разность положительна. Также, если $x<\frac{1}{n}$ и $n>1$, то $x-1<0$ и $x-\frac{1}{n}<0$, а следовательно, рассматриваемая разность и в этом случае положительна. Таким образом, в обоих случаях $x+\frac{1}{nx}>1+\frac{1}{n}$, что и требовалось доказать.

505. Пусть $\sqrt[n]{n}-1=z$, где $z>0$; отсюда находим

$$n=(1+z)^n=1+nz+\frac{n(n-1)}{2}\cdot z^2+\cdots+z^n,$$

откуда

$$n>\frac{n(n-1)}{2}z^2,$$

$$z^2<\frac{2}{n-1}<\frac{4}{n}, \quad (n>2),$$

т. е.

$$0<z<\frac{2}{\sqrt{n}},$$

или

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

506. Имеем

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}+1}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}+1}} = \frac{1}{2}.$$

507. Если данный треугольник равносторонний, то сумма расстояний любой точки, лежащей на стороне треугольника или внутри его, до его сторон равна высоте треугольника.

Пусть данный треугольник неравносторонний. Для определенности пусть $\angle C \geqslant \angle B \geqslant \angle A$ (рис. 95). Через произвольную точку M,

взятую внутри треугольника, проведем прямую $DE \| AB$ (точка D на AC; точка E на BC).

Из точки M опустим перпендикуляры MQ и MR на AC и BC, а из точки E — перпендикуляр EH на AC.

Из задачи 499 следует, что в треугольнике DCE

$$EH < MQ + MR. \tag{1}$$

Из точек M и E опускаем перпендикуляры MP и EG на AB.

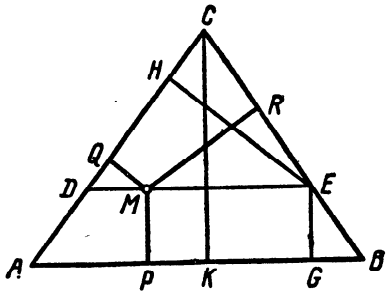

Рис. 95

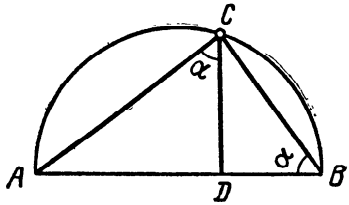

Рис. 96

Так как $MP = EG$, то (1) можно переписать так:

$$EH + EG < MQ + MR + MP. \tag{2}$$

В треугольнике ACB (см. задачу 499)

$$CK < EG + EH. \tag{3}$$

Из (2) и (3) имеем окончательно

$$CK < MQ + MR + MP, \text{ т. е.}$$

искомая точка — вершина наибольшего угла треугольника (Если $\angle C = \angle B > \angle A$, то любая точка отрезка BC — искомая, т. е. задача имеет бесконечное множество решений). Таким образом, высота CK, опущенная из вершины наибольшего угла, есть наименьшее значение для суммы $MQ + MP + MR$.

508. Обозначим угол ABC через α (рис. 96). Из прямоугольных треугольников ABC и ACD имеем

$$AC = AB \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \sin\alpha, \tag{1}$$

$$CD = AC \cdot \cos\alpha = 2R \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$AC \cdot CD = 4R^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Обозначим выражение $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ через y. Произведение $AC \cdot CD$ достигает максимума вместе с y, а потому и вместе с y^2.

$$y^2 = \sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) =$$

$$= 4 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} \cdot (1 - \sin^2\alpha),$$

Так как $\frac{\sin^2\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{2}+(1-\sin^2\alpha)=1$

— постоянная величина, то y^2 достигает максимума при

$$\frac{\sin^2\alpha}{2}=1-\sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$\sin^2\alpha=\frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем

$$AD=AC\cdot\sin\alpha=2R\cdot\sin^2\alpha=\frac{4R}{3}.$$

Итак, для построения точки C достаточно на диаметре AB отложить отрезок $AD=\frac{4R}{3}$ и из точки D провести перпендикуляр к диаметру AB до встречи с окружностью в точке C.

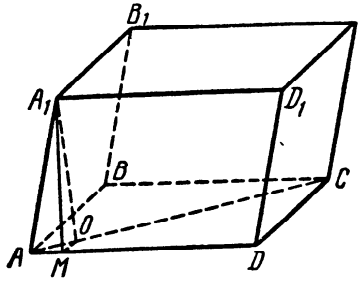

Рис. 97

509. Если $0<\alpha\leqslant 60°$, то возможен только один вид параллелепипеда, удовлетворяющий условию задачи; две противоположные вершины его — вершины трехгранных углов, каждый из плоских углов которых равен α.

Найдем объем параллелепипеда этого вида (рис. 97). Проводим A_1O перпендикулярно к плоскости $ABCD$. Все плоские углы трехгранного угла A — острые. Так как по условию $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\alpha$, то AO — биссектриса $\angle BAD$, т. е. $\angle CAD=\frac{\alpha}{2}$.

Проводим $OM\perp AD$ и строим отрезок A_1M. По теореме о трех перпендикулярах отрезок A_1M также перпендикулярен к AD, т. е. $\triangle AA_1M$ и $\triangle AOM$ — прямоугольные.

Из прямоугольного треугольника AA_1M находим, что

$$AM=a\cdot\cos\alpha,$$

а из прямоугольного треугольника AOM имеем

$$AO=\frac{AM}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим A_1O через H. Из прямоугольного треугольника AA_1O следует

$$H^2 = a^2 - \frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1+\cos\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) = \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$H = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Площадь основания параллелепипеда равна

$$S_{ABCD} = a^2\cdot\sin\alpha.$$

Теперь у нас достаточно данных для нахождения объема параллелепипеда

$$V = S_{ABCD}\cdot H = a^2\cdot\sin\alpha\cdot\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$V = 2a^3\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Если же $60°<\alpha<90°$, то, кроме указанного параллелепипеда, возможен еще один вид: две противоположные вершины его — вершины трехгранных углов, каждый из плоских углов которых $(180°-\alpha)$. В этом случае сумма всех трех тупых плоских углов меньше 360°. Проведя решение приемом, аналогичным рассмотренному, найдем

$$V_1 = 2a^3\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{-\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

510. Пусть AB_1 и A_1D — непересекающиеся диагонали двух смежных граней параллелепипеда, $\angle B_1AB=\alpha$, $\angle A_1DA=\beta$ (рис. 98).

Проводим DC_1 — диагональ грани DD_1C_1C. Так как $DC_1\parallel AB_1$, то угол между A_1D и AB_1 равен углу A_1DC_1, который мы обозначим через x.

Проводим $D_1M\perp DC$ в грани DD_1C_1C (точка M принадлежит C_1D). Легко убедиться, что $A_1M\perp DC_1$ (по теореме о трех перпендикулярах).

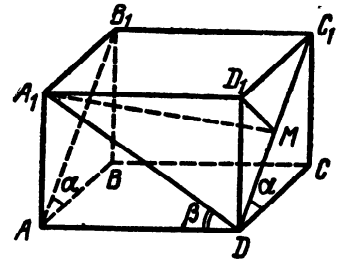

Рис. 98

Обозначим A_1D через l. Тогда из прямоугольного треугольника A_1DM имеем

$$DM = l.\cos x. \tag{1}$$

В прямоугольном треугольнике A_1D_1D угол $A_1=\beta$, следовательно,

$$DD_1 = l\cdot\sin\beta. \tag{2}$$

В прямоугольном треугольнике A_1D_1D угол $A_1=\beta$, следовательно, $DM=DD_1\sin\alpha$, или, учитывая (2),

$$DM = l\cdot\sin\alpha.\sin\beta. \tag{3}$$

Из равенств (1) и (3) следует, что $l\cdot\cos x=l\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$, откуда

$$\cos x = \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Отв. $\arccos(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$.

511. Пусть $f(x)=ax^2+bx$ — искомый многочлен. В силу условия задачи должно иметь место тождество

$$ax^2+bx-a(x-1)^2-b(x-1)=x.$$

Поскольку в тождестве должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях x, то

$$2a=1,\quad -a+b=0.$$

Отсюда $a=b=\frac{1}{2}$. Значит, искомый многочлен

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}=\frac{x(x+1)}{2}.$$

В данном тождестве заменяем последовательно x первыми n натуральными числами 1, 2, ..., $n-1$, n. Получаем

$$\begin{aligned}
f(1)-f(0)&=1,\\
f(2)-f(1)&=2,\\
f(3)-f(2)&=3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
f(n-1)-f(n-2)&=n-1,\\
f(n)-f(n-1)&=n.
\end{aligned}$$

Сложив почленно эти n равенств, получим

$$f(n)=1+2+3+\cdots+(n-1)+n,$$

или

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

512. Если $a=b$, то достигается равенство. Если же $a>b$, то доказываемое неравенство верно, если $nb^{n-1}\leqslant\frac{a^n-b^n}{a-b}\leqslant na^{n-1}$, или

$$nb^{n-1}\leqslant a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\leqslant na^{n-1},$$

или

$$\underbrace{b^{n-1}+b^{n-1}+\ldots+b^{n-1}}_{n\text{ раз}}\leqslant\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{n\text{ раз}}\leqslant$$

$$\leqslant\underbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}}_{n\text{ раз}}.$$

Так как, по условию $a>b$, то последнее соотношение очевидно, причем имеет место лишь строгое неравенство (случай $a=b$ уже рассмотрен).

513. Имеем

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{x-a+\sqrt{x-a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{0+\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{2a}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{2a}},$$

что и требовалось доказать.

514. В каком бы месте окружности по одну сторону от хорды AB ни была взята точка C (рис. 99), угол ACB будет иметь постоянное значение, которое обозначим через α. При всяком положении точки C выражение $\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\alpha$ будет представлять площадь S треугольника ACB. Отличаясь от произведения $AC\cdot BC$ постоянным множителем $\frac{1}{2}\sin\alpha$, оно будет иметь максимум одновременно с $AC\cdot BC$. Но максимум площади треугольника ACB, имеющего постоянное основание AB, будет при наибольшем значении высоты его, что, очевидно, может быть только тогда, когда вершина C будет находиться в точке пересечения окружности с перпендикуляром KAB, проведенным из середины AB, и, очевидно, в той из двух точек пересечения, которая будет отстоять дальше от AB. На нашем рисунке C_1 — искомая точка.

515. Рассмотрим две плоскости, заштрихованные на рис. 100, и треугольник ADE в плоскости P, проходящей через вершины A, D, H, E данного параллелепипеда. Плоскость P пересекает плоскость $\triangle BCD$ по прямой KD, которая проходит через точку K пересечения диагоналей параллелограмма $ABEC$, и, следовательно, отрезок KD есть медиана $\triangle AED$. Очевидно, что AO есть также медиана $\triangle AED$.

Поэтому интересующая нас точка S есть точка пересечения медиан $\triangle AED$ и, значит,

$$AS = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AH,$$

что и требуется.

516. Пусть $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ — искомый многочлен. Согласно условию задачи, должно иметь место тождество

$$ax^3 + bx^2 + cx - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - c(x-1) = x^2.$$

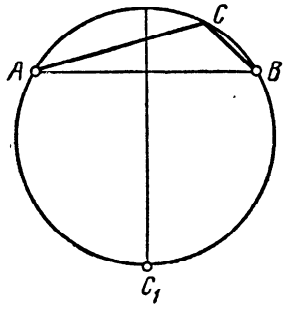

Рис. 99

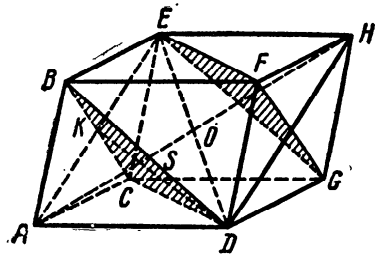

Рис. 100

Из этого тождества следует, что

$$3a = 1, \quad -3a + 2b = 0, \quad a - b + c = 0.$$

Отсюда находим

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, искомый многочлен

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

В данном тождестве заменяем последовательно x первыми n натуральными числами. Получаем

$$f(1) - f(0) = 1^2,$$
$$f(2) - f(1) = 2^2,$$
$$f(3) - f(2) = 3^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f(n-1) - f(n-2) = (n-1)^2,$$
$$f(n) - f(n-1) = n^2.$$

Сложив последние n равенств, получаем

$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2,$$

или

$$1^3+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

517. Для того чтобы $Ax^3+Bx^2+Cx+D=A(x+\alpha)^3$, или

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=A(x^3+3\alpha x^2+3\alpha^2 x+\alpha^3),$$

необходимо и достаточно, чтобы в обеих частях этого тождества коэффициенты при одинаковых степенях x были равны. Это дает следующие равенства

$$B=3A\alpha,\quad C=3A\alpha^2,\quad D=A\alpha^3.$$

Из первого равенства получаем $\alpha=\frac{B}{3A}$, или, подставляя это значение α в два других равенства, получаем

$$C=\frac{B^2}{3A}\text{ и }D=\frac{B^3}{27A^2}.$$

Если эти условия выполнены, то α равно $\frac{B}{3A}$, и мы имеем тождество

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=A\left(x+\frac{B}{3A}\right)^3.$$

518. Имеем очевидное неравенство

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n},$$

или

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),$$

т. е. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant 2-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}$,

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $n=1$, $n=2$ и при $n=3$.

519. Поскольку $\frac{x^n-1}{x-1}>0$, то, умножив обе части доказываемого неравенства на $\frac{(x^n-1)x^n}{x-1}$, получим неравенство

$\frac{(x^{n+1}+1)\cdot(x^n-1)}{x-1} > 2n\cdot x^n$. Преобразуем левую часть последнего неравенства так:

$$(x^{n+1}+1)\cdot\frac{x^n-1}{x-1} = (x^{n+1}+1)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) =$$

$$= x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x^{n+2}+x^{n+1}+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 =$$

$$= x^n\left[\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)\right].$$

Поскольку $x^m+\frac{1}{x^m}>2$, то выражение, заключенное в квадратных скобках, больше $2n$, следовательно, $\frac{(x^{n+1}+1)\cdot(x^n-1)}{x-1} > 2nx^2$, что и требовалось доказать.

520. Имеем

$$\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \frac{(\sqrt{1-x}-3)\cdot(\sqrt{1-x}+3)\cdot(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})\cdot(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\cdot(\sqrt{1-x}+3)} =$$

$$= \frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)\cdot(\sqrt{1-x}+3)} = -\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = -\lim_{x\to-8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3} =$$

$$= -\frac{4+4+4}{3+3} = -2,$$

что и требовалось доказать.

521. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2+n}{(n-2)^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{n}}{(n-2)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^2=1,$$

то искомый предел равен

$$\sqrt[3]{\frac{0\cdot 0}{1}}=0.$$

522. Обозначим через x, y, z расстояния от точки M, взятой внутри треугольника ABC, до его сторон (рис. 101). Тогда площадь треугольника

$$S=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2},$$

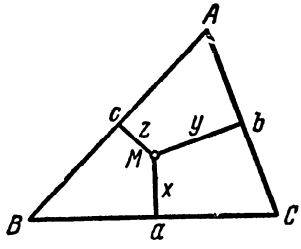

Рис. 101

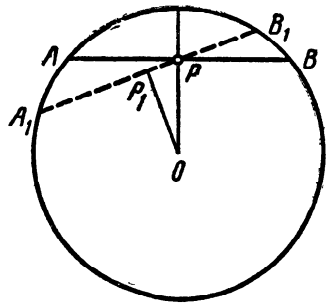

Рис. 102

откуда

$$ax+by+cz=2S,$$

т. е. $ax+by+cz$ — постоянная величина.

Произведение xyz принимает наибольшее значение тогда, когда достигает наибольшего значения $ax\cdot by\cdot cz$. Последнее имеет место, когда

$$ax=by=cz=\frac{2S}{3},$$

откуда

$$x=\frac{2S}{3a}=\frac{a\cdot h_a}{3a}=\frac{h_a}{3},\quad y=\frac{h_b}{3},\quad z=\frac{h_c}{3},$$

где h_a, h_b, h_c — высоты треугольника.

Из последних трех равенств заключаем, что искомая точка — точка пересечения медиан.

523. Через данную точку P проведем две хорды: одну хорду AB перпендикулярно к диаметру, проходящему через P, а другую произвольную хорду A_1B_1 (рис. 102). Опустив перпендикуляр OP_1

на A_1B_1, получим прямоугольный треугольник OP_1P, у которого гипотенуза OP больше катета OP_1, а следовательно, AB меньше A_1B_1.

Итак, наименьшая хорда, проходящая через точку, — это хорда, перпендикулярная к диаметру, проходящему через эту точку.

524. Проведем указанную в задаче плоскость через вершины B, D, F (рис. 103) и параллельную ей плоскость через вершины C, E, G. Обе плоскости образуют в пересечении с параллелепипедом равносторонние и равные треугольники. Длину стороны каждого из этих треугольников обозначим через a. Если теперь через середину одного из шести ребер, соединяющих вершины двух указанных треугольников, например через середину N ребра BC, — провести плос-

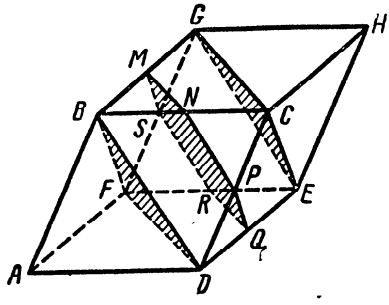

Рис. 103

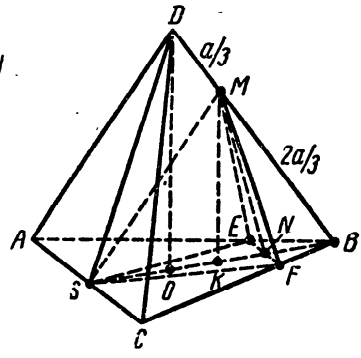

Рис. 104

кость, параллельную двум указанным плоскостям, то она даст в сечении с параллелепипедом шестиугольник $MNPQRS$, все стороны которого, очевидно, окажутся равными $\frac{a}{2}$. Заметим еще, что $MN \| DF$ и $NP \| BD$. Поэтому $\angle MNP$ дополняет $\angle BDF$ до 180° и, следовательно, $\angle MNP = 120°$. Аналогично устанавливаем, что и остальные углы шестиугольника равны 120°.

525. Пусть S — вершина конуса, окружность основания конуса пересекает ребра AB и BC в точках E и F. Следовательно, SM, SE, SF — образующие конуса (рис. 104). В силу условия задачи $MD = \frac{a}{3}$, $MB = \frac{2a}{3}$. Искомый радиус обозначим через R. Опустим перпендикуляры DO и MK на плоскость основания. Так как плоскость SDB перпендикулярна плоскости ABC, то точки O и K принадлежат BS. Имеем

$$BK = \frac{2}{3} OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{3\sqrt{3}}, \quad OK = \frac{a}{3\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$SK = SO + OK = \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{3\sqrt{3}} = \frac{5a}{6\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного треугольника MKB имеем

$$MK = \sqrt{MB^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},$$

а из прямоугольного треугольника SMK находим

$$SM = \sqrt{SK^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{108} + \frac{8a^2}{27}} = \frac{a\sqrt{19}}{6}.$$

Таким образом,

$$SM = SE = SF = \frac{a\sqrt{19}}{6}.$$

В треугольнике SCF угол C равен 60°. Следовательно,

$$SF^2 = SC^2 + CF^2 - SC \cdot CF,$$

или

$$\frac{19a^2}{36} = \frac{a^2}{4} + CF^2 - \frac{a}{2} \cdot CF.$$

Отсюда находим $CF = \frac{5a}{6}$. Следовательно, $BF = \frac{a}{6}$, $EF = \frac{a}{6}$, В треугольнике MBF угол B равен 60°, а потому $MF^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{a^2}{36} - \frac{a^2}{9} = \frac{13a^2}{36}$, откуда $MF = \frac{a\sqrt{13}}{6}$. Радиус основания конуса есть радиус окружности, описанной около треугольника EMF, стороны которого $EM = MF = \frac{a\sqrt{13}}{6}$, $EF = \frac{a}{6}$. Следовательно, высота треугольника

$$MN = \sqrt{\frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{144}} = \frac{a\sqrt{51}}{12}; \quad 2R = \frac{MF^2}{MN} = \frac{13a^2 \cdot 12}{36a\sqrt{51}}.$$

Отв. $R = \frac{13a}{6\sqrt{51}}$.

526. Разрешим это уравнение относительно x.

$$x = \frac{77y + 1}{60} = \frac{60y + (17y + 1)}{60} = y + \frac{17y + 1}{60}.$$

Пусть $\frac{17y + 1}{60} = z$, тогда $y = \frac{60z - 1}{17} = 3z + \frac{9z - 1}{17}$.

Если обозначить $\frac{9z - 1}{17}$ через t, то $z = \frac{17t + 1}{9} = 2t + \frac{1 - t}{9}$.

Наконец, пусть $\frac{1-t}{9}=n$, тогда $t=1-9n$. Таким образом, $z=2-18n+n=2-17n$, а потому $y=6-51n+1-9n=7-60n$, $x=2-17n+7-60n=9-77n$.

Отв. $x=9-77n$, $y=7-60n$, где n — любое целое число.

527. При $n=3$ имеем $2^3>7$, что верно. Докажем, что если выполняется неравенство

$$2^n > 2n+1, \tag{1}$$

то имеет место и неравенство

$$2^{n+1} > 2(n+1)+1 = 2n+3, \text{ или}$$

$$2^n \cdot 2 > 2n+3. \tag{2}$$

Учитывая (1), заключаем, что если верно неравенство

$$(2n+1)\cdot 2 > 2n+3, \tag{3}$$

то верно и неравенство (2). Неравенство (3) переписывается в виде $2n>1$, что очевидно. Таким образом, мы доказали, что неравенство (3) верно, а следовательно, и подавно выполняется неравенство (2). Итак, на основании принципа математической индукции заключаем, что утверждение задачи имеет место при натуральном $n\geqslant 3$.

528. Пусть $\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=f(x)$. Имеем

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}\right)}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\cdot(x+1)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot(x-1)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3\cdot(x-1)}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\cdot(x+1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot(x-1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3\cdot(x-1)}=\infty,\ \text{то}\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

529. Задача сводится к нахождению наименьшей суммы

$$AC+CD+DB.$$

Но так как CD — постоянная величина, то нам надо найти наименьшую сумму

$$AC+DB.$$

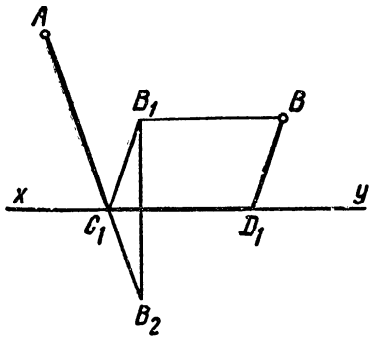

Рис. 105

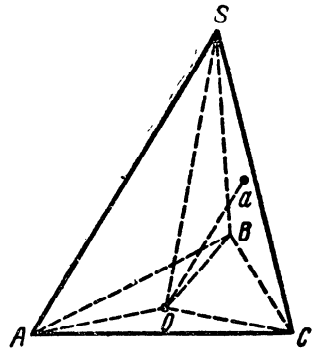

Рис. 106

Перенесем точку B параллельно прямой xy (рис. 105) на расстояние CD в некоторую точку B_1, потом отразим точку B_1 в точку B_2 относительно xy; затем соединяем отрезком точки A и B_2. Этот отрезок пересекает прямую xy в точке C_1. Далее, от точки C_1 откладываем на прямой xy отрезок C_1D_1, равный CD. Положение C_1D_1 и есть искомое положение отрезка CD.

Действительно, нам надо найти наименьшую сумму $AC+DB$, которая равна $AC_1+B_1C_1$. Но в силу нашего построения $AC_1+B_1C_1=AC_1+B_2C_1$; следовательно, перед нами стояла задача найти кратчайшее расстояние между точками A и B_2, а это кратчайшее расстояние есть отрезок AB_2, который равен сумме $AC_1+C_1B_2$, которая в свою очередь равна $AC+DB$.

530. Если за общее основание двух тетраэдров $SABC$ и $SOBC$ (рис. 106) принять грань SBC, то их высоты и, следовательно, их объемы будут относиться, как SA к Oa, т. е. $\dfrac{Oa}{SA}=\dfrac{\text{объем } SOBC}{\text{объем } SABC}$. Из этого равенства вместе с двумя другими, ему аналогичными, мы и получаем искомое равенство

$$\frac{Oa}{SA}+\frac{Ob}{SB}+\frac{Oc}{SC}=$$

$$=\frac{\text{объем } SOBC+\text{объем} SOCA+\text{объем } SOAB}{\text{объем } SABC}=1.$$

531. Для определенности пусть $y\geqslant x$. Если в заданном уравнении заменить y на небо́льшую величину x, то будем иметь $\frac{3}{x^2}\geqslant 1$, или $x^2\leqslant 3$. Но так как нас интересуют только решения в натуральных числах, то $x^2\geqslant 1$. Легко заметить, что $x=1$ не удовлетворяет данному уравнению, поэтому $x^2>1$. Итак, имеем $1<x^2\leqslant 3$, или $1<x\leqslant \sqrt{3}$. Поскольку между числами 1 и $\sqrt{3}$ нет ни одного целого числа, то данное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

532. Так как $221=17\cdot 13$, то данное уравнение можно переписать в таком виде

$$(x+y)\cdot(x-y)=17\cdot 13.$$

Поскольку 17 и 13 простые числа, то уравнение может выполняться лишь при

$$x+y=17,\quad x-y=13.$$

Отсюда $x=15$, $y=2$.

533. Перепишем данное число в следующем виде

$$29^n+19^n+15^n-6^n-2^{4n}-2^n,$$

или

$$(29^n-16^n)+(19^n-6^n)+(15^n-2^n).$$

Поскольку разность одинаковых степеней делится на разность оснований, то каждое из чисел, заключенных в скобках, делится на 13, а потому и данное число кратно 13.

534. Если $n=2$, то имеем $\frac{16}{3}<\frac{4!}{(2!)^2}$, что очевидно. Допустим, что доказываемое неравенство выполняется для $n=k$, т. е.

$$\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}, \tag{1}$$

и докажем, что тогда оно имеет место и при $n=k+1$, т. е.

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}. \tag{2}$$

Имеем

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}=\frac{4^k\cdot 4\cdot(k+1)}{(k+2)\cdot(k+1)}. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!\cdot 2}{(k!)^2\cdot(2k^2+5k+2)} < \frac{(2k+2)!\cdot 2}{(k!)^2\cdot(k+1)^2\cdot 2} = \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}$$

Таким образом, мы доказали, что если верно (1), то верно и (2), а также мы убедились, что утверждение задачи верно при $n=2$. В силу изложенного на основании принципа математической индукции заключаем, что доказываемое неравенство справедливо для любого натурального $n \geqslant 2$.

535. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}(x^3+1-x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

536. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\cdot\sqrt{(x+a)(x+b)}+x)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1} = \frac{a+b}{2}.$$

537. Пусть точка O_1 — середина стороны AB квадрата, вписанного в данную окружность O, и P — точка пересечения прямых OM и

AB (рис. 107). Так как $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AO_1N$ и $AO = AO_1 \cdot \sqrt{2}$, то имеем: площадь сектора OAM равна площади O_1AN или

пл. OAP + пл. APM = пл. O_1PN + пл. APM + пл. AMN.

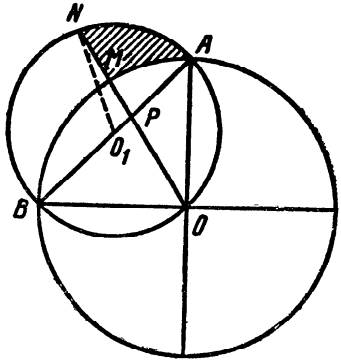

Рис. 107

Отсюда пл. AMN = пл. OAP — пл. O_1PN. Посредством циркуля и линейки можно, очевидно, построить некоторый треугольник, площадь которого равнялась бы разности площадей двух треугольников OAP и O_1PN, а следовательно, и квадрат, равновеликий этой разности площадей. Этот квадрат и будет равновелик криволинейному треугольнику AMN.

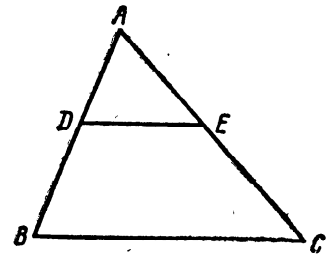

Рис. 108

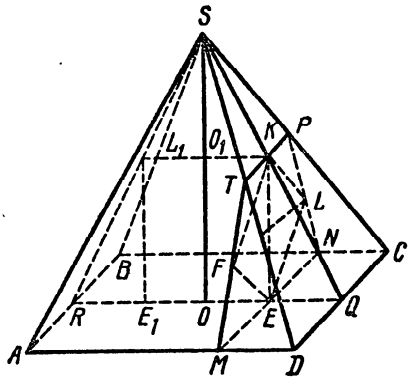

Рис. 109

538. Пусть прямая DE отсекает от треугольника ABC трапецию, периметр которой равен $2p$ (рис 108). Введем обозначения: $AE = x$, $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$.

Так как $DE \parallel BC$, то имеем

$$\frac{x}{b} = \frac{AD}{c} = \frac{DE}{a}.$$

Отсюда $AD = \frac{cx}{b}$, $DE = \frac{ax}{b}$. Далее, $CE = b - x$, $BD = c - \frac{cx}{b} = \frac{c(b-x)}{b}$. Таким образом, периметр трапеции

$$b-x+\frac{ax}{b}+\frac{c(b-x)}{b}+a=2p.$$

Отсюда $x=\dfrac{b\cdot(a+b+c-2p)}{b+c-a}$.

539. На рис. 109 показаны пирамида $SABCD$, KL_1 и EE_1 — ребра куба, $EFKL$ — грань куба, O — основание высоты пирамиды, O_1 — точка пересечения SO и KL_1, RQ — средняя линия основания пирамиды, $MTPN$ — сечение пирамиды, в плоскости которого лежит грань куба $EFKL$. Пусть ребро куба равно a. Так как параллельное сечение пирамиды есть квадрат, то $TP=a$. Диагональ FL квадрата $EFKL$ является средней линией трапеции $MTPN$. Так как $FL=a\sqrt{2}$, то $MN=2a\sqrt{2}-a=a(2\sqrt{2}-1)$, и поскольку $MN=AB$, то и $AB=a(2\sqrt{2}-1)$. Из подобия треугольников RSQ и L_1SK следует, что $\dfrac{RQ}{L_1K}=\dfrac{SO}{SO_1}$, или $\dfrac{a(2\sqrt{2}-1)}{a}=\dfrac{SO}{SO-a\sqrt{2}}$,

Отсюда $SO=\dfrac{a}{2}(3\sqrt{2}+2)$. Объем пирамиды

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot(3\cdot\sqrt{2}+2)\cdot a^2(2\sqrt{2}-1)^2,$$

а объем куба $V_2=a^3$. Следовательно, отношение

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{6}a^3(3\sqrt{2}+2)\cdot(2\sqrt{2}-1)^2}{a^3}=\frac{19\sqrt{2}-6}{6}.$$

Отв. $\dfrac{19\sqrt{2}-6}{6}$.

540. Пусть $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида с вершиной M (рис. 110). Пусть секущая плоскость пересекает ребра MD и MC в точках P и Q, а стороны основания BC и AD в точках R и S. Сечением является равнобедренная трапеция, основания которой PQ и RS, а боковые стороны RQ и PS. Пусть $PQ=z$. Так как по условию в эту трапецию можно вписать круг, то $PS=QR=\dfrac{a+z}{2}$. Пусть ME — высота грани MAD. Так как высота пирамиды равна $a\sqrt{2}$, то $ME=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+2a^2}=\dfrac{3a}{2}$. Через точку Q проводим прямую $QT\parallel PD$ до пересечения с CD в точке T. Из подобия треугольников MED и PSD следует $\dfrac{ME}{PS}=\dfrac{MD}{PD}$. Но так как $PD=QT$, то $\dfrac{ME}{PS}=\dfrac{MD}{QT}$. Далее, из подобия треугольников MDC и QTC

получаем $\frac{MD}{QT}=\frac{DC}{TC}$. Из последних двух пропорций следует, что $\frac{ME}{PS}=\frac{DC}{TC}$, или $\frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a+z}{2}}=\frac{a}{a-z}$. Отсюда $z=\frac{a}{2}$. Таким образом, периметр сечения равен

$$2(z+a)=2\left(\frac{a}{2}+a\right)=3a.$$

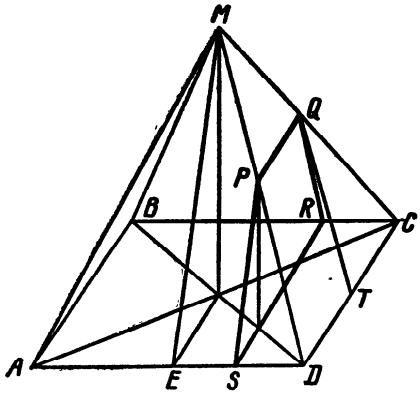

Рис. 110

541. Данное уравнение перепишем в виде

$$\sin\left[\pi-3\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)\right]=$$
$$=2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right). \quad (1)$$

Введем обозначение $\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=z$. Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$\sin(\pi-3z)=2\sin z, \quad \text{или}$$
$$\sin 3z-2\sin z=0, \quad \text{или}$$
$$\sin 3z-\sin z-\sin z=0, \quad \text{или}$$
$$2\cos 2z\cdot\sin z-\sin z=0, \quad \text{или}$$
$$\sin z(2\cos 2z-1)=0.$$

Это уравнение распадается на два

$$\sin z=0 \text{ и } 2\cos 2z-1=0.$$

Из уравнения $\sin z=0$ находим $z=k\pi$. Но, учитывая, что $z=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}$, имеем $x=\frac{3\pi}{5}-2k\pi$.

Из уравнения $2\cos 2z-1=0$, следует $\cos 2z=\frac{1}{2}$, откуда $2z=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и $z=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, т. е. $\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, откуда $x=\frac{3\pi}{5}\pm\frac{\pi}{3}-2k\pi$.

542. При $n=2$ доказываемое неравенство имеет вид $2!\cdot 4!>(3!)^2$, что верно. Предположим, что подлежащее доказательству неравенство справедливо при $n=k-1$, т. е.

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2k-2)!>(k!)^{k-1}. \qquad (1)$$

Покажем, что тогда утверждение задачи верно и при $n=k$, т. е.

$$2!\cdot 4!\ldots(2k)!>[(k+1)!]^k. \qquad (2)$$

Умножив обе части неравенства (1) на $(2k)!$, получим

$$2!\cdot 4!\ldots(2k-2)!\cdot(2k)!>(2k)!(k!)^{k-1},$$

или

$$2!\cdot 4!\ldots.(2k-2)!\cdot(2k)!>\frac{(2k)!(k!)^k}{k!},$$

т. е.

$$2!\cdot 4!\ldots(2k-2)!\cdot(2k)!>2k\cdot(2k-1)\ldots(k+1)\cdot(k!)^k. \qquad (3)$$

Имеем

$$(2k)(2k-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot(k!)^k>(k+1)^k(k!)^k=[(k+1)!]^k. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует $2!\cdot 4!\ldots(2k-2)!\,(2k)!>[(k+1)!]^k$.

Итак, мы установили, что доказываемое неравенство верно при $n=2$, а также убедились, что верен переход от $n=k-1$ к $n=k$. Отсюда на основании принципа математической индукции следует, что утверждение задачи верно при любом натуральном $n\geqslant 2$.

543. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}.$$

544. Предположим, что задача решена. Около треугольника ABC опишем окружность. Из центра O этой окружности опустим перпендикуляр на AB и продолжим его до пересечения с окружностью в точке K. Поскольку дуги AK и KB равны, то CK — биссектриса угла

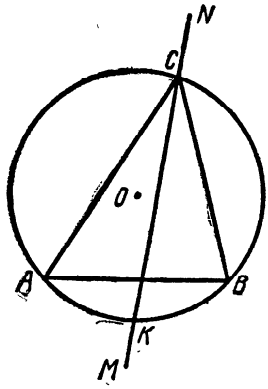

Рис. 111

C (рис. 111). Отсюда и вытекает способ построения. Проводим через середину AB прямую, перпендикулярную AB, и пусть K — точка ее пересечения с MN. Далее, через точки A, B и K проводим окружность. Тогда, если C — вторая точка пересечения MN с окружностью, то треугольник ABC искомый. Ясно, что если MN и AB пересекаются под углом, отличным от прямого, то задача имеет единственное решение; если MN и AB пересекаются под прямым углом и MN не проходит через середину AB, то задача не имеет решений; наконец, если MN и AB пересекаются под прямым углом и MN проходит через середину AB, то задача имеет бесчисленное множество решений, поскольку, в этом случае, каждая точка, принадлежащая MN, может служить вершиной C искомого треугольника.

545. Первый случай. Шар и сфера имеют внутреннее касание (рис. 112, *а*). Пусть O_1 — центр сферы, O — центр шара. Опу-

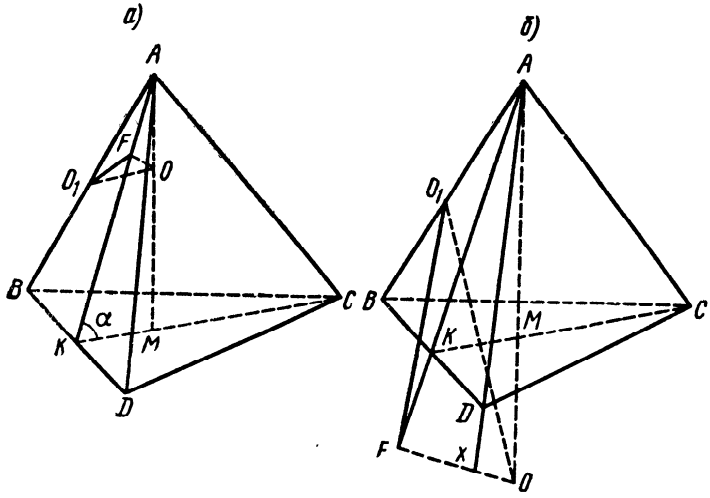

Рис. 112

стим из центра O шара перпендикуляр OF на плоскость ABD. Обозначим через x радиус шара. Пусть AK — высота треугольника ABD, а AM — высота тетраэдра. Так как $AK=3KM$, то $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. В прямоугольном треугольнике AOF имеем $OF=x$, $AO=3x$, $AF=2x\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1AF имеем $\angle A=30°$, $O_1F^2=AO_1^2+AF^2-2\cdot AO\times$ $\times AF\cdot\cos 30°$, т. е.

$$O_1F^2=\frac{a^2}{4}+8x^2-ax\sqrt{6}. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника O_1FO получаем $O_1F^2=OO_1^2-OF^2$, т. е.

$$O_1F^2=\left(\frac{a}{2}-x\right)^2-x^2. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\frac{a^2}{4}+8x^2-ax\sqrt{6}=\frac{a^2}{4}-ax.$$

Отсюда

$$x=\frac{a\left(\sqrt{6}-1\right)}{8}.$$

Второй случай. Шар и сфера имеют внешнее касание (рис. 112, *б*). Сохраняя обозначения первого случая, имеем $OF=x$ — радиус шара. Тогда $AO=3x$, $AF=2x\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника OO_1F, $(\angle F=90°)$ имеем $OO_1=\frac{a}{2}+x$, а потому

$$O_1F^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-x^2. \qquad (3)$$

Из треугольника AO_1F следует, что

$$O_1F^2=\frac{a^2}{4}+8x^2-ax\sqrt{6}. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что

$$\frac{a^2}{4}+ax=\frac{a^2}{4}+8x^2-ax\sqrt{6}.$$

Отсюда $x=\frac{a\left(\sqrt{6}+1\right)}{8}$.

Ответ. $\frac{a\left(\sqrt{6}\pm 1\right)}{8}$.

546. Так как $2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\cdot\sin^2 x-2\cos^2 x\cdot\sin^2 x=\cos 4x+\cos\frac{\pi}{3},$$

или

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \cos 4x - \frac{1}{2} = 0,$$

или

$$1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) - \cos 4x - \frac{1}{2} = 0,$$

откуда $\cos 4x = \frac{1}{3}$.. Следовательно, $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}$.

Отв. $k\pi \pm \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2; \ldots$

547. Данное уравнение перепишем последовательно так:

$$2 - (7 + \sin x)\left(\sin^2\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$2 - (7 + \sin x)\cdot\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

$$2 - (7 + \sin x)\cdot\frac{\sin^2 x}{4} = 0,$$

$$\sin^3 x + 7\sin^2 x - 8 = 0,$$

$$(\sin x - 1)\cdot(\sin^2 x + 8\sin x + 8) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\sin x_1 = 1, \quad \sin x_2 = 2\left(\sqrt{2} - 2\right), \quad \sin x_3 = -2\left(\sqrt{2} + 2\right).$$

Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то имеем лишь $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

548. При $n = 1$ доказываемое неравенство имеет вид $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1 + 1}}$, что верно (имеет место равенство). Далее, предполагая, что утверждение задачи верно при $n = k$, т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}, \tag{1}$$

докажем, что оно верно и при $n = k+1$, т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \tag{2}$$

Умножив обе части неравенства (1) на положительную дробь $\frac{2k+1}{2k+2}$, получим

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Таким образом, остается доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \qquad (3)$$

Умножив обе части (3) на $(2k+2)\cdot\sqrt{3k+1}\cdot\sqrt{3k+4}$ и возведя обе части полученного неравенства в квадрат, получим

$$(2k+1)^2\cdot(3k+4)\leqslant(2k+2)^2\cdot(3k+1),\text{ или }12k^3+28k^2+$$
$$+19k+4\leqslant 12k^3+28k^2+20k+4. \qquad (4)$$

Неравенство (4) верно, так как $k>0$. Итак, неравенство (3) доказано, следовательно, верно и неравенство (2). В силу изложенного заключаем, что подлежащее доказательству неравенство верно при любом натуральном n.

Неравенство (3) можно доказать и так:

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{2k+1}{\sqrt{(3k+1)\cdot(2k+2)^2}}=$$
$$=\frac{2k+1}{\sqrt{(3k+4)(2k+1)^2+k}}<\frac{2k+1}{\sqrt{(3k+4)(2k+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

549. При $n=1$ доказываемое неравенство верно, так как $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ при любом положительном x. При $n=2$ утверждение задачи принимает вид $x^2+1+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 3$, что верно, так как $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$. Далее, предположим, что доказываемое неравенство справедливо при $n=k$, где k — некоторое натуральное число, т. е.

$$x^k+x^{k-2}+x^{k-4}+\cdots+\frac{1}{x^{k-4}}+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1. \qquad (1)$$

Докажем, что подлежащее доказательству неравенство справедливо и при $n=k+2$, т. е.

$$x^{k+2}+x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+3. \qquad (2)$$

Действительно, сложив почленно неравенство (1) с известным неравенством $x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant 2$, получим неравенство (2). Итак, мы убедились, что доказываемое неравенство верно при $n=1$ и $n=2$. Мы доказали также, что из справедливости неравенства при $n=k$ следует его справедливость и при $n=k+2$, т. е. верен переход от $n=k$ к $n=k+2$.

Таким образом, 1) из того, что доказываемое неравенство справедливо при $n=1$ и что верен переход от k к $k+2$, заключаем, что наше неравенство верно для любого нечетного n; 2) в силу того, что неравенство имеет место при $n=2$ и что верен переход от $n=k$ к $n=k+2$, заключаем, что подлежащее доказательству неравенство верно для любого четного n. Следовательно, на основании 1) и 2) утверждение задачи справедливо при любом натуральном n. Эту задачу можно решить и не пользуясь методом математической индукции, например, так. Пусть S — левая часть доказываемого неравенства. При четном n имеем

$$S=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\cdots+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)\geqslant$$
$$\geqslant \underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{\frac{n}{2}\text{ раз}}+2=n+2.$$

При нечетном n имеем

$$S=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\cdots+\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant$$
$$\geqslant \underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{\frac{n+1}{2}}=n+1.$$

550. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

551. а) Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

б) Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}-\lim_{x\to-\infty}x=\infty-(-\infty)=\infty.$$

552. Пусть a, b, c — стороны и h_1, h_2, h_3 — соответствующие высоты искомого треугольника. Если S — площадь треугольника, то имеем $a\cdot h_1=b\cdot h_2=c\cdot h_3=2S$. Отсюда $h_1=\frac{2S}{a}$, $h_2=\frac{2S}{b}$, $h_3=\frac{2S}{c}$.

Но так как, по условию, $h_3=h_1+h_2$, то $\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}=\frac{2S}{c}$, или $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, откуда $c=\frac{ab}{a+b}$. Таким образом, если a и b — данные стороны, то третья сторона строится, как четвертая, пропорциональная к отрезкам $a+b$, a, b. Наконец, строим треугольник по трем сторонам a, b и c.

553. Первое решение. Имеем $BD=CE$ и $BD=EF$ (рис. 113). Следовательно, треугольник CEF — равнобедренный. Обозначим углы при основании равнобедренного треугольника ABC через α, а углы при основании равнобедренного треугольника CEF через β. Продолжим FE до пересечения со стороной BC в точке K. Образовавшийся угол FKC тоже равен α. Угол FEC — внешний по отношению к треугольнику EKC, а потому он равен 2α. В треугольнике FEC сумма внутренних углов равна $2(\alpha+\beta)=180°$, откуда $\alpha+\beta=90°$. Итак, $\angle FCB=90°$, что и требовалось доказать.

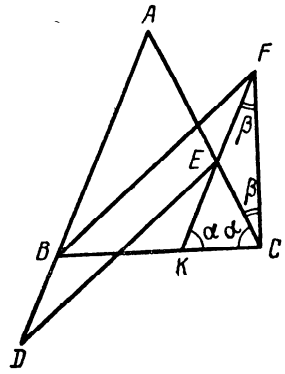

Рис. 113

Второе решение. Продолжив FE до пересечения с BC в точке K, получим треугольник KFC, в котором CE — медиана, так как $CE=FE$ и $CE=EK$. Так как медиана CE равна половине стороны FK, то $\angle FCK=90°$.

554. Центр шара, вписанного в трехгранный угол C (рис. 114) лежит на прямой CN, по которой пересекаются биссекторные плоскости двугранных углов CD и BC; O — центр шара радиуса $OE=2R$. Аналогично, $O_1F=3R$ — радиус шара, вписанного в трехгранный

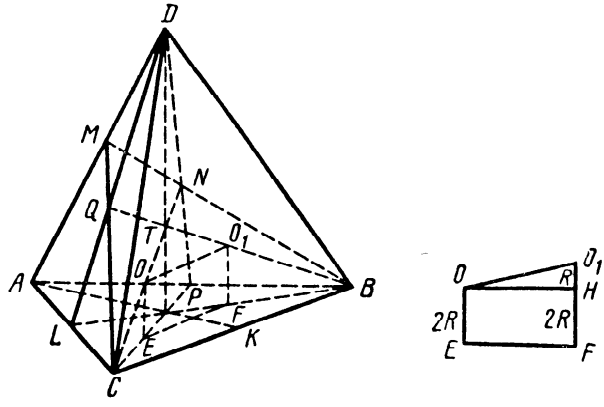

Рис. 114

угол B. Пусть ребро $AB=2x$, T — точка пересечения прямой BO_1Q с высотой пирамиды DP. Из прямоугольного треугольника ADP имеем

$$DP=\sqrt{4x^2-\frac{4x^2}{3}}=\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Отрезок $TP=\frac{1}{4}DP=\frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.

Из подобия треугольников CTP и COE имеем

$$\frac{TP}{OE}=\frac{CP}{CE},\ CE=\frac{OE\cdot CP}{TP}=\frac{2R\cdot\frac{2x}{\sqrt{3}}}{\frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}}=4R\sqrt{2}.$$

$$CE=2\sqrt{2}\cdot 2R=4R\sqrt{2}.$$

По аналогии

$$BF=2\sqrt{2}\cdot 3R=6R\sqrt{2}.$$

В треугольнике EPF угол $P=120°$.

$$PE=\frac{2x}{\sqrt{3}}-4R\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-4R\right),$$

$$PF=\frac{2x}{\sqrt{3}}-6R\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-6R\right).$$

Положим, что

$$\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=z,\ x=\frac{z\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$PE=\sqrt{2}\,(z-4R),\ PF=\sqrt{2}\,(z-6R).$$

Так как

$$EF^2=PE^2+PF^2+PE\cdot PF,\ \text{то}$$

$$EF^2=2(z-4R)^2+2(z-6R)^2+2(z-4R)\cdot(z-6R).$$

$$EF^2=6z^2-60Rz+152R^2.$$

Теперь рассмотрим отдельно четырехугольник EOO_1F. В треугольнике OO_1H отрезок $OH=EF$.

$$EF^2=25R^2-R^2=24R^2.$$

Следовательно,

$$6z^2 - 60Rz + 152R^2 = 24R^2,$$
$$3z^2 - 30Rz + 64R^2 = 0.$$

Отсюда

$$z = \frac{15R \pm \sqrt{225R^2 - 192R^2}}{3} = \frac{\left(15 \pm \sqrt{33}\right) R}{3}.$$

Таким образом,

$$2x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15 + \sqrt{33}}{3} \cdot R = \left(5\sqrt{6} + \sqrt{22}\right) R,$$

а

$$2x_2 = \left(5\sqrt{6} - \sqrt{22}\right) \cdot R.$$

Возможно лишь $2x = (5\sqrt{6} + \sqrt{22})R$, так как $3R < TP$ (TP — радиус шара, вписанного в данный тетраэдр). Допустив, что $2x = (5\sqrt{6} - \sqrt{22})R$, получим

$$TP - 3R = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} - 3R = \left[\frac{\left(5\sqrt{6} - \sqrt{22}\right) \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{3}} - 3\right] R =$$
$$= \frac{10\sqrt{3} - \sqrt{44} - 12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot R < 0,$$

что невозможно.

Ответ. $\left(5\sqrt{6} + \sqrt{22}\right) R$.

555. Пусть $\triangle AB_1C_1$ — сечение пирамиды $SABC$, площадь которого надо определить, а апофема SD пересекает B_1C_1 в точке D_1 (рис. 115). Так как AB образует с плоскостью сечения угол в 30°, то точка B удалена от секущей плоскости на $\frac{a}{2}$, и поскольку BC параллельно этому сечению, то перпендикуляр DN к плоскости AB_1C_1 тоже равен $\frac{a}{2}$ (очевидно, что точка N принадлежит AD_1). В треугольнике ADD_1

$$\angle A = \arcsin\frac{DN}{AD} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \angle D = \arccos\frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$\sin D_1 = \sin(A + D) = \sin A \cdot \cos D + \cos A \cdot \sin D = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \text{т. е. } \sin D_1=\frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

Так как

$$\frac{DD_1}{\sin A}=\frac{AD}{\sin D_1}=\frac{AD_1}{\sin D}\ \text{ и }\ AD=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

то

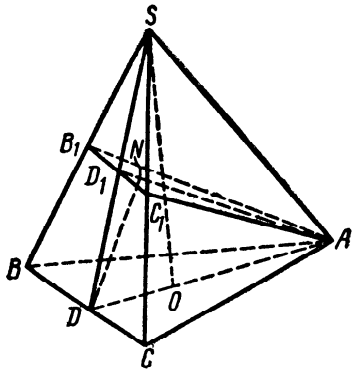

Рис. 115

$$DD_1=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{3a\sqrt{3}}{10},$$

$$AD_1=\frac{3a\sqrt{2}}{5}.$$

Далее,

$$SD_1=SD-DD_1=\frac{a}{2}\sqrt{3}-\frac{3a\sqrt{3}}{10}=\frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Из подобия треугольников SBC и SB_1C_1 имеем

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{SD_1}{SD},\ \text{откуда } B_1C_1=\frac{BC\cdot SD_1}{SD}=\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{5}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{5}a.$$

Теперь мы имеем достаточно данных для определения площади сечения. Площадь сечения

$$S=\frac{1}{2}B_1C_1\cdot AD_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}a\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{5}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{25}.$$

Ответ. $\dfrac{3a^2\sqrt{2}}{25}$.

556. Перепишем данное уравнение в виде

$$3(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}3x)=\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}3x,$$

или

$$3\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right)=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x},$$

$$\frac{3\cdot\cos 2x}{\sin 3x\cdot\cos x}=\frac{\cos x}{\sin 3x\cdot\cos 2x},$$

$$3\cos^2 2x=\cos^2 x,$$

$$3\cos^2 2x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$6\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

Решив последнее уравнение относительно $\cos 2x$, получим $\cos 2x=\frac{1\pm 5}{12}$. Отсюда $\cos 2x_1=\frac{1}{2}$, $\cos 2x_2=-\frac{1}{3}$.

Следовательно, $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$.

В процессе решения было произведено умножение обеих частей уравнения на произведение $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x$. Но легко видеть, что ни при одном из найденных значений x это произведение не обращается в нуль. Следовательно, все найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

557. При $n=1$ имеет место равенство: $|a_1|=|a_1|$; при $n=2$ неравенство имеет вид

$$|a_1+a_2|\leqslant|a_1|+|a_2|, \qquad (1)$$

что верно.

Предположим, что утверждение задачи выполняется при $n=k$, т. е.

$$|a_1+a_2+\cdots+a_k|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|. \qquad (2)$$

Докажем, что оно имеет место и при $n=k+1$, т. е.

$$|a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|+|a_{k+1}|. \qquad (3)$$

Обозначив $a_1+a_2+\ldots+a_k$ через A, неравенство (3) перепишем в виде

$$|A+a_{k+1}|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|+|a_{k+1}|, \qquad (4)$$

а неравенство (2)

$$|A|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|. \qquad (5)$$

Так как $|A+a_{k+1}|\leqslant|A|+|a_{k+1}|$, то в силу (5) верно неравенство (4), а поэтому и неравенство (3).

558. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

559. Первое решение. Продолжим BA на отрезок $AD=b$ (рис. 116). В равнобедренном треугольнике CAD углы ADC и ACD равны между собой и каждый из них равен половине внешнего угла BAC, т. е. равен углу B. Следовательно, треугольник BCD также равнобедренный. Отсюда построение: на прямой откладываем отрезки $AB=c$ и $AD=b$. Из середины E отрезка BD проводим перпендикуляр EC и засекаем его из точки A, как из центра, дугой радиуса b; точка C пересечения есть третья вершина искомого треугольника ABC. Чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы было $AC>AE$, но $AE=\left|c-\frac{c+b}{2}\right|=\frac{|c-b|}{2}$. Итак, должно быть $2b>|c-b|$. Это неравенство заведомо выполняется, если $b\geqslant c$; тогда оно принимает вид $2b\geqslant b-c$, или $b+c>0$. Если же $b<c$, то неравенство принимает вид $2b>c-b$, или $3b>c$. Так как из $b\geqslant c$ следует $3b>c$, то оба случая можно объединить. Итак, задача имеет решение, если $3b>c$.

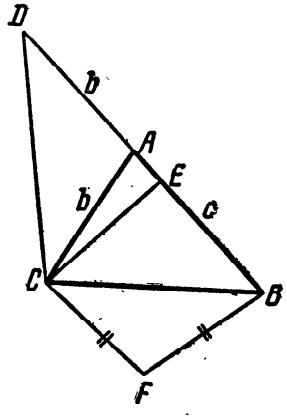

Рис. 116

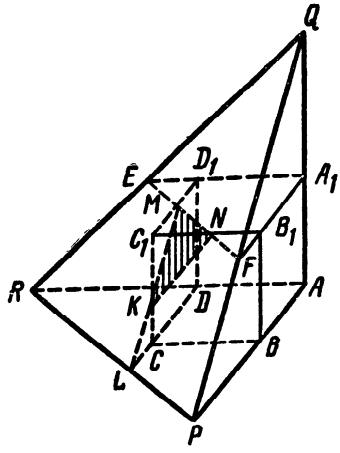

Рис. 117

Второе решение. Из подобия треугольников ACD и CBD следует, что $\frac{AD}{DC}=\frac{BC}{BD}$, т. е. $\frac{b}{a}=\frac{a}{b+c}$. Следовательно, сторона a есть среднее геометрическое двух отрезков b и $b+c$. Построив его, остается построить треугольник ABC по трем сторонам.

Третье решение. Проведем $CF\parallel AB$ и BF под углом ABF, равным углу BAC, к стороне AB. В равнобедренной трапеции $ABCF$ сторона $AC=BF=b$. Кроме того, $\angle FCB=\angle CBA=\angle FBC$; следовательно, треугольник BFC равнобедренный и $CF=BF=b$. Построение сводится к построению трапеции $ABFC$ по четырем сторонам.

560. Через точки Q и R плоскости AA_1D_1D проведем прямую (рис. 117). Эта прямая пересечет продолжение ребра A_1D_1 в некоторой точке E. Из подобия треугольников EQA_1 и RQA следует, что

$A_1E=\frac{3}{2}AD$. Через точки Q и P плоскости AA_1B_1B проводим прямую, которая пересечет продолжение ребра A_1B_1 в точке F. Ясно, что $A_1F=\frac{3}{2}AB$. Через точки P и R плоскости $ABCD$ проводим прямую, которая пересечет продолжение ребра DC в точке L. Аналогично предыдущему $DL=\frac{3}{2}DC$. Через точки E и F плоскости $A_1B_1C_1D_1$ проводим прямую, которая пересекает ребро C_1D_1 в точке M, а ребро B_1C_1 в точке N. Рассматривая треугольники MD_1E, FB_1N и C_1MN, убеждаемся, что точки M и N являются серединами ребер C_1D_1 и B_1C_1. Теперь через точки M и L плоскости CDD_1C_1 проводим прямую, которая пересекает ребро CC_1 в точке K. Рассматривая треугольники C_1MK и KCL, убеждаемся, что точка K является серединой ребра CC_1. Таким образом, сечением куба является треугольник KMN, где точки K, M и N являются серединами ребер CC_1, C_1D_1 и B_1C_1. Это сечение отсекает от куба пирамиду C_1KMN, у которой все плоские углы при вершине C_1 прямые; следовательно, ее объем равен $\frac{1}{6}C_1K\cdot C_1M\cdot C_1N=\frac{V}{48}$, где V — объем куба. Итак, сечение KMN делит объем куба в отношении 1 : 47.

Отв. 1 : 47.

561. Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{16\sin^8 x}{2\cos^2 x}+\frac{16\cos^8 x}{2\sin^2 x}=2,$$

или

$$\frac{(2\sin^2 x)^4}{2\cos^2 x}+\frac{(2\cos^2 x)^4}{2\sin^2 x}=2,$$

$$\frac{(1-\cos 2x)^4}{1+\cos 2x}+\frac{(1+\cos 2x)^4}{1-\cos 2x}=2,$$

$$(1-\cos 2x)^5+(1+\cos 2x)^5=2(1-\cos^2 2x),$$

$$5\cos^4 2x+11\cos^2 2x=0,$$

$$\cos^2 2x(5\cos^2 2x+11)=0.$$

Так как уравнение $5\cos^2 2x=-11$ не имеет решений, то имеем только $\cos 2x=0$. Отсюда $x=(2n+1)\cdot\frac{\pi}{4}$, где $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

562. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sin x\cdot\cos x(\sin^5 x-\cos^5 x)-(\sin x-\cos x)=0.$$

Известно, что $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.
Поэтому уравнение принимает вид

$$\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x-\cos x)(\sin^4 x+\sin^3 x\cdot\cos x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x+$$
$$+\sin x\cdot\cos^3 x+\cos^4 x)-(\sin x-\cos x)=0.$$

Это уравнение распадается на два

$$\sin x - \cos x = 0$$

и

$$\sin x \cdot \cos x (\sin^4 x + \sin^3 x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \\ + \sin x \cdot \cos^3 x + \cos^4 x) - 1 = 0.$$

Из первого уравнения получаем $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Для облегчения решения второго уравнения введем обозначение $y = \sin x \cdot \cos x$. Имеем

$$y (\sin^4 x + \cos^4 x + y \cdot \sin^2 x + y^2 + y \cdot \cos^2 x) - 1 = 0,$$

или

$$y [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + y (\sin^2 x + \cos^2 x) + y^2] - 1 = 0$$

или

$$y (1 - 2y^2 + y + y^2) - 1 = 0, \text{ или}$$

$$y^3 - y^2 - y + 1 = 0, \text{ или}$$

$$(y - 1)^2 (y + 1) = 0.$$

Отсюда $y = \pm 1$, т. е. $\sin x \cdot \cos x = \pm 1$, или $\sin 2x = \pm 2$, что невозможно. Таким образом, второе уравнение не имеет решений.

Итак, все решения данного уравнения выражаются формулой

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

563. Предварительно докажем, что правильная дробь, числитель и знаменатель которой положительны, увеличится, если к обоим членам дроби прибавить одно и то же положительное число. Действительно, пусть $b > a > 0$, $m > 0$. Тогда $bm > am$, $ab + bm > ab + am$, $b(a+m) > a(b+m)$. Отсюда $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$, т. е. утверждение верно. Поэтому

$$\frac{10^{n-1} + 1}{10^n + 1} = \frac{10^n + 10}{10^{n+1} + 10} > \frac{10^n + 10 - 9}{10^{n+1} + 10 - 9} = \frac{10^n + 1}{10^{n+1} + 1}.$$

564. Так как $\sqrt{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = 1$, то доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{1 + a_1}{\sqrt{a_1}} \cdot \frac{1 + a_2}{\sqrt{a_2}} \cdot \frac{1 + a_3}{\sqrt{a_3}} \cdots \frac{1 + a_n}{\sqrt{a_n}} \geqslant 2^n,$$

или

$$\left(\sqrt{a_1} + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) \cdot \left(\sqrt{a_2} + \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \cdot \left(\sqrt{a_3} + \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right) \cdots \\ \cdots \left(\sqrt{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \geqslant 2^n,$$

что верно, так как $\sqrt{a_1}+\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}\geqslant 2$, $\sqrt{a_2}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}\geqslant 2$ и т. д. Равенство достигается лишь при $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=1$.

565. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{4+4}{1+1}=4.$$

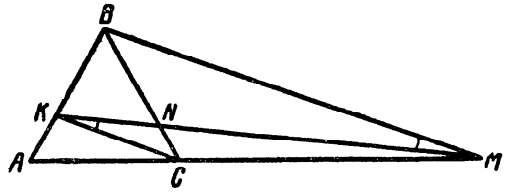

Рис. 118

566. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$, то

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=-\infty.$$

567. Введем обозначения $BK=x$, $BN=y$, $CM=z$, площадь треугольника $ABC=S$, площадь треугольника $KBN=S_1$ (рис. 118). В силу условия задачи имеем

$$S=2S_1. \tag{1}$$

Но $S=\dfrac{a^2}{2}\sin 60°$, а $S_1=\dfrac{xy}{2}\cdot\sin 60°$, поэтому

$$\frac{S_1}{S}=\frac{xy}{a^2}. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$xy=\frac{a^2}{2}. \tag{3}$$

Равновеликие треугольники KBC и KMC имеют общее основание KC, а потому их высоты, опущенные из вершин B и M, равны; следовательно, прямые BM и KC параллельны между собой. Вследствие этого имеем $\frac{AC}{CM}=\frac{AK}{BK}$, т. е.

$$\frac{a}{z}=\frac{a-x}{x}. \tag{4}$$

Также $\frac{BN}{CN}=\frac{BM}{KC}=\frac{AB}{AK}$, т. е.

$$\frac{y}{a-y}=\frac{a}{a-x}. \tag{5}$$

Из равенств (3), (4) и (5) находим $x=\frac{2a}{3}$, $y=\frac{3a}{4}$, $z=2a$, т. е. $BK=\frac{2a}{3}$, $BN=\frac{3a}{4}$, $CM=2a$.

568. Для определенности пусть $a>b$. Продолжим боковые стороны AB и CD до пересечения в точке E (рис. 119). Согласно условию задачи, $\angle AED=\alpha$. Через вершину B проведем прямую BK, параллельную DC (точка K на AD). Из подобия треугольников AMD и BMC (M — точка пересечения диагоналей) следует, что

$$\frac{AM}{MC}=\frac{MD}{MB}=\frac{AD}{BC}=\frac{a}{b}.$$

В силу этих равенств удобно ввести следующие обозначения

$$AM=ax,\ MC=bx,\ MD=ay,\ MB=by.$$

Из прямоугольного треугольника AMD имеем $AM^2+MD^2=AD^2$, или $a^2x^2+a^2y^2=a^2$, или

$$x^2+y^2=1. \tag{1}$$

Из прямоугольного треугольника AMB следует, что $AB^2=AM^2+MB^2$, или $AB^2=a^2x^2+b^2y^2$. Из прямоугольного треугольника CMD имеем

$$CD=\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}.$$

Поскольку $BK\parallel ED$, то $\angle ABK=\alpha$ и $AK=a-b$, $CD=BK$. По теореме косинусов из треугольника ABK следует, что

$$AK^2=AB^2+BK^2-2\,AB\cdot BK\cdot\cos\alpha,$$

или

$$(a-b)^2=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2-2\cos\alpha\times$$
$$\times\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2)(b^2x^2+a^2y^2)},$$

или

$$a^2-2ab+b^2=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)-2\cos\alpha\times$$
$$\times\sqrt{a^2b^2(x^4+y^4)+(a^4+b^4)x^2y^2}. \tag{2}$$

Так как $x^2+y^2=1$ (равенство (1)), то $x^4+y^4=1-2x^2y^2$. Поэтому равенство (2) перепишется в виде

$$a^2b^2 = \cos^2\alpha\,[a^2b^2\,(1-2\,x^2y^2) + (a^4+b^4)\,x^2y^2],$$

или

$$\frac{a^2b^2}{\cos^2\alpha} - a^2b^2 = (a^2-b^2)^2\,x^2y^2,$$

$$a^2b^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) = (a^2-b^2)^2\,x^2y^2,$$

$$a^2b^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = (a^2-b^2)^2\,x^2y^2.$$

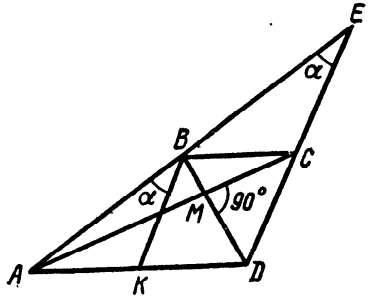

Рис. 119

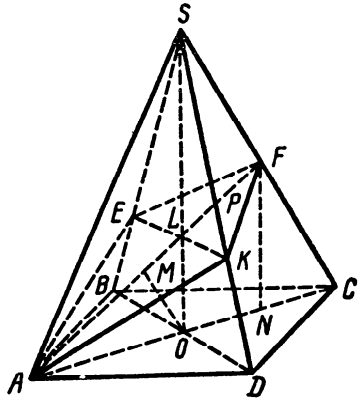

Рис. 120

Отсюда

$$xy = \frac{ab}{a^2-b^2}\cdot|\mathrm{tg}\,\alpha|.$$

Площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}\,AC\cdot BD = \frac{1}{2}\,(a+b)\,x\cdot(a+b)\,y = \frac{(a+b)^2\cdot xy}{2} =$$

$$= \frac{ab\,(a+b)}{2\,(a-b)}\cdot|\mathrm{tg}\,\alpha|.$$

Ответ. $\dfrac{ab\,(a+b)}{2\cdot(a-b)}\cdot|\mathrm{tg}\,\alpha|.$

569. Пусть P — секущая плоскость, проходящая через A параллельно диагонали BD основания пирамиды; $AEFK$ — сечение пирамиды плоскостью P. Так как BD параллельно сечению, то $BD \parallel EK$ (рис. 120). Точка B удалена от плоскости P на $\dfrac{a}{2}$, так как AB составляет с плоскостью P угол в 30°. Но поскольку BD параллельно

P, то расстояние от центра O основания пирамиды до P тоже равно $\frac{a}{2}$, т. е. $OM=\frac{a}{2}$, где OM перпендикуляр к плоскости P. В треугольнике AOM: $\angle M=90°$, $OM=\frac{a}{2}$, $OA=\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Следовательно, $\angle MAO=45°$, а поэтому $OL=OA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее, $SL=SO-OL=2a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{3a\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}SO$. Так как $SL=\frac{3}{4}SO$, то $EK=\frac{3}{4}BD$, т. е. $EK=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Опустим из точки F перпендикуляр FN на плоскость основания. Так как плоскость SAC перпендикулярна плоскости $ABCD$, то точка N находится на диагонали AC основания пирамиды. Из подобия треугольников SOC и FNC следует, что

$$\frac{SO}{FN}=\frac{OC}{NC}. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника AMO следует, что $AM=\sqrt{AO^2-MO^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$. Так как $\angle MAO=45°$, то $AN=FN$. Пусть $AN=FN=x$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде $\frac{2a\sqrt{2}}{x}=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a\sqrt{2}-x}$, или $\frac{4}{x}=\frac{1}{a\sqrt{2}-x}$. Отсюда $x=\frac{4a\sqrt{2}}{5}$. Следовательно, $AF=x\sqrt{2}=\frac{8a}{5}$. Поскольку $BD\perp AC$, то $BD\perp AF$, а потому $EK\perp AF$. В силу последнего площадь сечения

$$S=AF\cdot\frac{EK}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8a}{5}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{5}.$$

Отв. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{5}$.

570. Пусть O_1 и O_2 — центры шаров, вписанных в трехгранные углы с вершинами A и B правильного тетраэдра $DABC$ (рис. 121). Точка O_1 лежит на прямой AO, по которой пересекаются биссекторные плоскости двугранных углов AD и AC данного тетраэдра. Обе эти плоскости проходят через точку A и точку O — центр тетраэдра. По аналогичной причине точка O_2 лежит на прямой BO. Пусть x — радиус каждого из шаров. Так как $EM=\frac{1}{3}DE$, то $\angle EDM=\alpha=$

$=\arcsin\frac{1}{3}$. Из треугольника AO_1K имеем $AK=x\cdot\operatorname{ctg}\alpha=2x\sqrt{2}$. Поскольку в треугольнике KMF угол M равен 120°, то $MF=MK=\frac{a}{\sqrt{3}}-2x\sqrt{2}$, $KF=O_1O_2=2x$; но, кроме того, $KF=MK\sqrt{3}$, поэтому $2x=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-2x\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}$. Отсюда $x=\frac{a}{2\left(\sqrt{6}+1\right)}$. Наконец, для того чтобы получить центры O_3 и O_4 еще двух шаров,

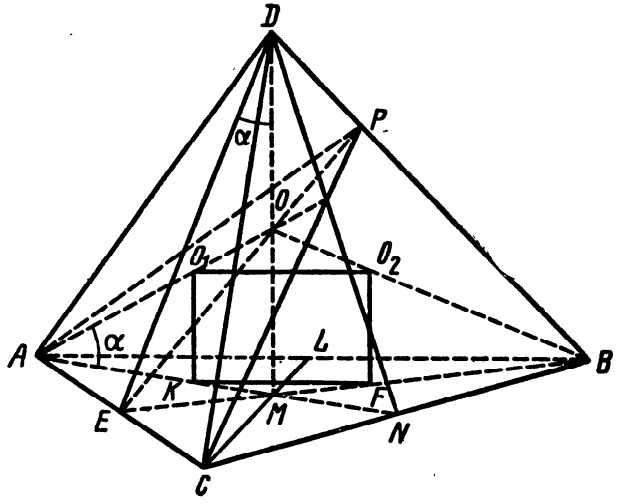

Рис. 121

достаточно отложить на CO и DO соответственно отрезки $CO_3=DO_4=\frac{3a}{2\left(\sqrt{6}+1\right)}$, поскольку $AO_1=BO_2=\frac{3a}{2\left(\sqrt{6}+1\right)}$.

Ответ. $\frac{a}{2\left(\sqrt{6}+1\right)}$.

571. Данное уравнение перепишем в виде

$$8\cdot\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=3\left(2\cos^2 2x-1\right)+\cos 2x+4,$$

или

$$1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x-6\cos^2 2x+3-$$
$$-\cos 2x-4=0,$$

или

$$\cos^3 2x - 3\cos^2 2x + 2\cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x\,(\cos^2 2x - 3\cos 2x + 2) = 0.$$

Это уравнение распадается на два

$$\cos 2x = 0 \text{ и } \cos^2 2x - 3\cos 2x + 2 = 0.$$

Из первого уравнения находим $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot k$, а из второго $x = \pi\cdot n$, где k и n — любые целые числа.

572. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{5^x + 13^x}{2} > 2^{3x} = 8^x. \qquad (1)$$

Так как среднее арифметическое неравных положительных чисел больше их среднего геометрического, то

$$\frac{5^x + 13^x}{2} > \sqrt{5^x\cdot 13^x} = \sqrt{65^x} > \sqrt{64^x} = 8^x.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (1), а следовательно, и доказываемое.

573. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \infty.$$

574. Искомая площадь равна сумме площадей двух секторов с углами 2α и 2β (рис. 122) без удвоенной площади треугольника со сторонами R, r, d

$$S = R^2\alpha + r^2\beta - Rd\cdot\sin\alpha.$$

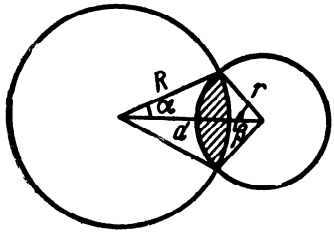

Рис. 122

Для определения углов α и β имеем два уравнения

$$R\cdot\sin\alpha = r\cdot\sin\beta,$$

$$R\cdot\cos\alpha + r\cdot\cos\beta = d,$$

решая которые, находим

$$\cos\alpha = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd},$$

$$\cos\beta = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd}.$$

Следовательно,

$$S = R^2 \cdot \arccos \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd} + r^2 \cdot \arccos \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd} -$$

$$- Rd \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd}\right)^2} .$$

575. Из соображений симметрии следует, что центр O_2 шара радиуса $2r$ лежит в сечении ASC, проходящем через вершину S пирамиды и диагональ AC основания, а центр O_1 шара радиуса r лежит на высоте SH пирамиды $SABCD$ (рис. 123, *а*, *б*). Пусть точка N — середина ребра CD. Обозначим сторону основания пирамиды через a. Тогда $HN = \frac{a}{2}$, апофема $SN = a$ и линейный угол двугранного угла при ребре CD равен 60° ($\angle SNH = 60°$). Радиусы O_2K и O_2M

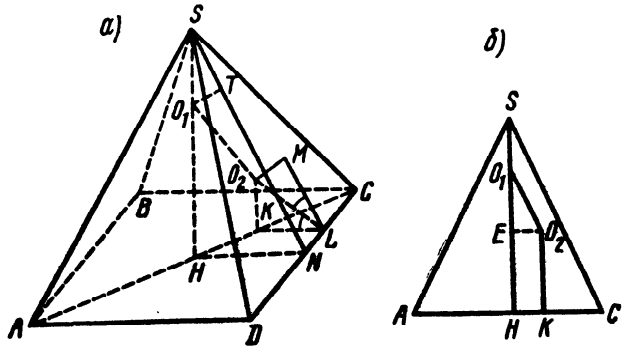

Рис. 123

шара с центром O_2, проведенные в точки касания шара с основанием пирамиды и с боковой гранью CSD, перпендикулярны соответствующим граням, поэтому плоскость O_2KM перпендикулярна ребру CD. Пусть L — точка их пересечения. Тогда

$$\angle O_2LK = \angle O_2LM = 30°,$$

$$KL = 2r\sqrt{3},$$

$$KC = 2r\sqrt{6}, \quad (\angle HCL = 45°),$$

и если обозначить длину отрезка HK через x, то

$$HC = x + 2r\sqrt{6},$$

$$HN = \frac{x + 2r\sqrt{6}}{\sqrt{2}},$$

$$SH=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(x+2r\sqrt{6}\right)=x\sqrt{\frac{3}{2}}+6r.$$

С другой стороны, если провести радиус O_1T шара с центром O_1 в точку касания этого шара с гранью CSD, то треугольник O_1TS будет прямоугольным, $\angle O_1ST=30°$ и поэтому $SO_1=2r$. Теперь рассмотрим отдельно сечение пирамиды плоскостью ASC (рис. 123, *б*). Опустим перпендикуляр O_2E на SH. Тогда

$$EO_2=HK=x,\ EH=O_2K=2r,$$

$$O_1E=SH-SO_1-EH=x\sqrt{\frac{3}{2}}+2r,$$

и поскольку шары касаются друг друга, то $O_1O_2=3r$. Из прямоугольного треугольника O_1EO_2 следует, что

$$\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}+2r\right)^2+x^2=9r^2,$$

$$\frac{5}{2}x^2+4\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot rx-5r^2=0,$$

$$5x^2+4\cdot\sqrt{6}\cdot r\cdot x-10r^2=0.$$

Положительный корень этого уравнения

$$x=\frac{-2\sqrt{6}+\sqrt{74}}{5}\cdot r.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=HC=x+2\sqrt{6}\cdot r=\frac{8\sqrt{6}+\sqrt{74}}{5}\cdot r.$$

Отсюда находим значение a.

Отв. $a=\frac{2r}{5}\left(8\sqrt{3}+\sqrt{37}\right)$.

576. Умножив обе части данного уравнения на $2\sin\frac{x}{8}$, получим

$$2\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8},$$

или

$$\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8},$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{4}\sin\frac{x}{8},$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{8},$$

$$\sin 2x = \sin \frac{x}{8}.$$

Отсюда получаем два уравнения

$$2x + \frac{x}{8} = (2k+1)\pi \text{ и } 2x - \frac{x}{8} = 2m\pi,$$

$$x_1 = \frac{8}{17}(2k+1)\pi, \quad x_2 = \frac{16\,m\pi}{15}.$$

Пусть $\sin \frac{x}{8} = 0$, откуда $x = 8n\pi$.

Следовательно, в формуле $x_1 = \frac{8}{17}(2k+1)\pi$ надо исключить все $2k+1$, кратные 17, а в формуле $x_2 = \frac{16\,m\pi}{15}$ — все m, кратные 15.

577. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sin^2 x (\sin 2x + 3) \cdot (\sin^2 x - 1) + 1 = 0,$$

или

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin 2x + 3) - 1 = 0,$$

$$4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin 2x + 3) - 4 = 0,$$

$$\sin^3 2x + 3 \sin^2 2x = 4.$$

Поскольку $|\sin \alpha| \leqslant 1$, то последнее равенство возможно лишь при $\sin 2x = 1$. Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

578. Поскольку $\sin \alpha$ — правильная положительная дробь, то

$$3 - 6 \sin^2 \alpha + 4 \sin^3 \alpha > 3 - 6 \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha.$$

или

$$3 - 6 \sin^2 \alpha + 4 \sin^3 \alpha > 4 \sin^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} =$$

$$= 4\left(\sin^2 \alpha - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

579. Перепишем доказываемое неравенство в таком виде

$$1 + (1 - \sin^2 3x) + \cos^2 5x - (\cos 8x + \cos 2x) > -\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos 5x. \quad (1)$$

Но так как $1 - \sin^2 3x = \cos^2 3x$, а $\cos 8x + \cos 2x = 2 \cos 5x \cos 3x$, то неравенство (1) принимает вид

$$1 + \cos^2 3x + \cos^2 5x - 2 \cos 5x \cdot \cos 3x > -\sin^2 x (1 - \cos 5x),$$

или

$$1 + (\cos 5x - \cos 3x)^2 > -\sin^2 x (1 - \cos 5x). \quad (2)$$

Так как $1>0$, $(\cos 5x-\cos 3x)^2\geqslant 0$, $-\sin^2 x\leqslant 0$, $1-\cos 5x\geqslant 0$, то левая часть неравенства (2) положительна, а правая неположительна, а поэтому неравенство (2) имеет место при любом x. Следовательно, верно и доказываемое неравенство.

580. Обозначим левую часть доказываемого равенства через A. Имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}=1,$$

то $A=\frac{a}{b}\cdot 1\cdot 1=\frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

581. Обозначим левую часть доказываемого равенства через A. Имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{k\cdot\sin kx}{kx\cdot\cos kx}=k\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=1,$$

то $A=k\cdot 1\cdot 1=k$, что и требовалось доказать.

582. Так как площадь $S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A$ и $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, то в силу условия задачи имеем

$$\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos A-b^2+2bc-c^2,$$

$$1-\cos A=\frac{1}{4}\sin A,$$

$$\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{1}{4}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$, а потому $A=2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Ответ. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

583. Из треугольника BQC (рис. 124) имеем

$$\frac{CQ}{\sin\frac{B}{3}}=\frac{BC}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)},\text{ откуда }CQ=\frac{BC\cdot\sin\frac{B}{3}}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

Из треугольника APC следует, что

$$\frac{PC}{\sin\frac{A}{3}}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)},$$

откуда

$$PC=\frac{AC\cdot\sin\frac{A}{3}}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

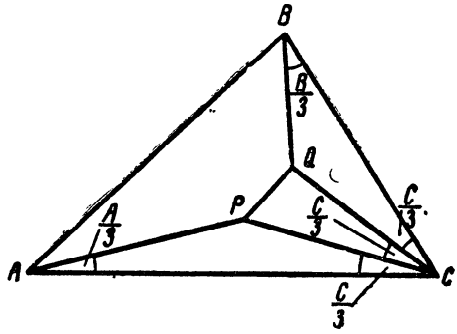

Рис. 124

Поскольку $BC=2R\sin A$, $AC=2R\sin B$, то

$$CQ=\frac{2R\cdot\sin A\cdot\sin\frac{B}{3}}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)},\quad PC=\frac{2R\cdot\sin B\cdot\sin\frac{A}{3}}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

Площадь треугольника PQC

$$S=\frac{1}{2}\cdot CQ\cdot PC\cdot\sin\frac{C}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2R\cdot\sin A\cdot\sin\frac{B}{3}}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)}\cdot\frac{2R\cdot\sin B\cdot\sin\frac{A}{3}}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

Отв $\dfrac{2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin\frac{A}{3}\cdot\sin\frac{B}{3}}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$

584. Первое решение. Пусть четырехугольник $ABFE$ — сечение пирамиды (рис. 125). Так как $AB \| DC$, то AB параллельно грани SCD, а потому $EF \| AB$ и поскольку точка F — середина SC, то EF — средняя линия треугольника SCD.

Введем обозначения: V — объем пирамиды $SABCD$, V_1 — объем пирамиды $FABCD$, V_2 — объем пирамиды $ADCS$, V_3 — объем пирамиды $ADEF$, V_4 — объем многогранника $ABCDEF$. Пирамиды $SABCD$ и $FABCD$ имеют общее основание $ABCD$, а высота FM пирамиды $FABCD$ равна половине высоты SO пирамиды $SABCD$. Поэтому $V_1 = \frac{V}{2}$. Так как пирамиды $ADCS$ и $SABCD$ имеют общую высоту, а площадь основания первой пирамиды в два раза меньше площади основания второй, то $V_2 = \frac{V}{2}$. Пирамиды $ADSC$ и $ADEF$ имеют общую вершину A, а их основания лежат в одной плоскости; также заметим, что площадь треугольника DEF равна $\frac{1}{4}$ площади треугольника DSC. Следовательно, $V_3 = \frac{V_2}{4}$, т. е. $V_3 = \frac{V_2}{4} = \frac{V}{8}$. Объем многогранника $ABCDEF$

$$V_4 = V_1 + V_3 = \frac{V}{2} + \frac{V}{8} = \frac{5V}{8}.$$

Значит, объем пирамиды $SABFE$

$$V_5 = V - \frac{5V}{8} = \frac{3V}{8}.$$

Искомое отношение

$$\frac{V_5}{V_4} = \frac{\frac{3}{8}V}{\frac{5}{8}V} = \frac{3}{5}.$$

Второе решение. Продолжим EF на отрезок $FK = EF$. Четырехугольник $DCKE$ — параллелограмм, так как DC и KE равны и параллельны, а потому DE и CK также равны и параллельны. Таким же образом убеждаемся, что четырехугольник $ABKE$ — параллелограмм, у которого стороны AE и BK равны и параллельны. Наконец, отметим, что так как $ABCD$ — квадрат, то DA и CB равны и параллельны. Значит, в треугольниках ADE и BCK соответствующие стороны равны и параллельны, а потому эти треугольники равны и принадлежат параллельным плоскостям. Кроме того, $DC = EK = AB$ и прямые CD, EK и AB параллельны. Из изложенного следует, что многогранник $BCKADE$ — треугольная призма с основаниями ADE и BCK. Эта призма является половиной параллелепипеда, у которого в основании лежит квадрат $ABCD$, а одной из боковых граней служит параллелограмм $DCKE$. Следовательно, объем призмы $BCKADE$ равен половине объема этого параллелепипеда, т. е. половине произведения площади квадрата $ABCD$ на высоту параллелепи-

педа FM, опущенную из точки F на плоскость $ABCD$. Введем обозначения: S — площадь квадрата $ABCD$, H — высота пирамиды $SBCD$, V — объем пирамиды $SABCD$, V_1 — объем призмы $BCKADE$. Заметив, что $FM = \frac{H}{2}$, имеем $V_1 = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \frac{H}{2} = \frac{SH}{4}$. Но так как $V = \frac{SH}{3}$, то $V_1 = \frac{3}{4} V$, т. е. объем призмы $BCKADE$ составляет 3/4 объема данной пирамиды $SABCD$. Для определения объема V_3

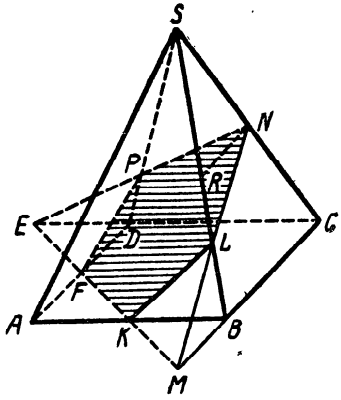

Рис. 125

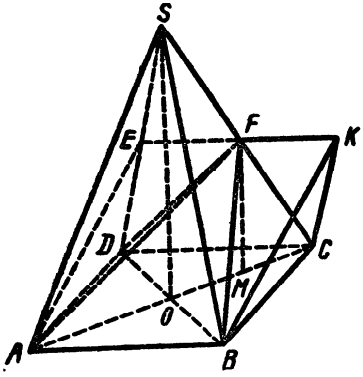

Рис. 126

многогранника $ABCDEF$ надо из объема V_1 призмы $BCKADE$ вычесть объем V_2 пирамиды $BCKF$. Пусть S_1 — площадь треугольника CKF, а h — высота, опущенная из вершины B на плоскость треугольника CKF. В силу этих обозначений имеем

$$V_2 = \frac{S_1 h}{3}. \qquad (1)$$

Пирамиды $BDSC$ и $BCKF$ имеют общую вершину B, а площадь треугольника DSC в 4 раза больше площади треугольника KCF; поэтому

$$V_2 = \frac{1}{4} V_4, \text{ где } V_4 = \frac{V}{2} \text{ — объем пирамиды } BDSC.$$

Далее, имеем

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{3}{4} V - \frac{1}{4} \cdot \frac{V}{2} = \frac{5}{8} V.$$

Следовательно, секущая плоскость делит объем пирамиды в отношении $\left(V - \frac{5}{8} V\right) : \frac{5V}{8} = 3:5$.

Отв. 3/5.

585. Плоскость сечения пересекает плоскость основания $ABCD$ пирамиды по прямой KM (рис. 126). Пусть прямая KM пересекает

продолжение CD в некоторой точке E, а ребро AD — в точке F. Очевидно, что точка F — середина ребра AD и точка E отстоит от точки D на $\frac{1}{2}DC$, т. е. $DE=\frac{1}{2}DC, \left(EC=\frac{3}{2}DC\right)$. Поскольку точки M и N принадлежат плоскости грани SBC, то прямая MN пересекает ребро SB в некоторой точке L. Проводим в треугольнике SBC среднюю линию NR. Так как $BM=NR=\frac{1}{2}BC$, $\angle LBM=\angle NRL$ и $\angle BML=\angle RNL$, то треугольники NRL и LBM равны. Из равенства этих треугольников следует, что $BL=RL$. Следовательно, точка L делит ребро SB в отношении 3 : 1. Так как точки E и N принадлежат плоскости грани SCD, то прямая EN пересекает ребро SD в некоторой точке P. Очевидно, что точка P делит ребро SD в отношении 3 : 1. Таким образом, плоскость сечения пересекает пирамиду по пятиугольнику $KFPNL$. Введем обозначения: H — высота данной пирамиды $SABCD$, a — сторона основания пирамиды. В силу этих обозначений объем данной пирамиды $SABCD$

$$V=\frac{a^2H}{3}.$$

Поскольку точка N — середина ребра SC, то ясно, что перпендикуляр, опущенный из точки N на плоскость $ABCD$, равен $\frac{H}{2}$, и так как точки L и P делят ребра SB и SD в отношении 3 : 1, то перпендикуляры, опущенные из точек L и P на плоскость $ABCD$, равны $\frac{H}{4}$. Легко заметить, что площадь каждого из треугольников DEF и BMK равна $\frac{a^2}{8}$, а площадь треугольника ECM равна $\frac{9}{8}a^2$. Объем пирамиды $NECM$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{9a^2}{8}=\frac{9}{16}V$, а объем каждой из пирамид $PEFD$ и $LKBM$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{4}\cdot\frac{a^2}{8}=\frac{1}{32}V$. Следовательно, объем многогранника $CDFKBLNP$

$$V_1=\frac{9}{16}V-2\cdot\frac{1}{32}V=\frac{V}{2},$$

т. е. сечение делит объем пирамиды пополам.

Отв. 1 : 1.

586. Должно быть $\sin x\geqslant 0$, $\cos x\leqslant 0$. Имеем

$$\left(\sqrt{\sin x}\right)^2=(-\cos x)^2.$$

Таким образом, должны иметь место одновременно соотношения

$$\sin x\geqslant 0,\ \cos x\leqslant 0,\ \sin x=\cos^2 x,$$

или

$$\sin x\geqslant 0,\ \cos x\leqslant 0,\ \sin^2 x+\sin x-1=0.$$

Отсюда $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Так как $\cos x<0$, то все решения данного уравнения выражаются формулой $x=(2k+1)\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Отв. $(2k+1)\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, где k — любое целое число.

587. Так как $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$, то $\sin\alpha>\frac{1}{2}$ и $\cos\alpha>\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\frac{1}{\sin\alpha}<2 \text{ и } \frac{1}{\cos\alpha}<2.$$

Следовательно, учитывая что $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, имеем

$$0\leqslant\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\leqslant\frac{\pi}{4\sin\alpha}<\frac{\pi}{2} \text{ и } 0\leqslant\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\leqslant\frac{\pi}{4\cos\alpha}<\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)>0, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)>0.$$

Рассмотрим отдельно случаи $x=\alpha$, $x<\alpha$, $x>\alpha$.

Если $x=\alpha$, то имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right)=2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=2>1.$$

Если $x<\alpha$, то имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)\geqslant\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Наконец, если $x>\alpha$, то имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)\geqslant\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

588. Обозначим левую часть доказываемого равенства через A. Имеем

$$A=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin5x}{5x}}\cdot\frac{1}{\cos2x}\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}=1, \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=1, \quad \lim_{x\to0}\frac{1}{\cos2x}=1,$$

то $A=\frac{2}{5}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{2}{5}$, что и требовалось доказать.

589. Пусть $AC=b$, O — центр данной окружности, x — искомый радиус, O_1 — центр искомой окружности, $OP\perp AC$, Q — точка касания AC к окружности радиуса x, $OPQR$ — прямоугольник. Из рис. 127 усматриваем

$$OO_1 = r - x,\quad O_1R = O_1Q + QR = x + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}},$$

$$OR = PQ = AQ - AP = x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2}.$$

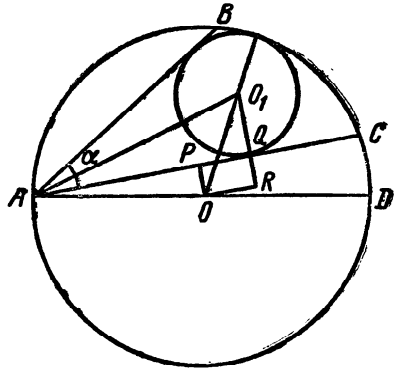

Рис. 127

Далее, из прямоугольного треугольника O_1OR находим

$$\left(x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(x + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)^2 = (r-x)^2,$$

или

$$x^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - bx\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{b^2}{4} + x^2 + 2x\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} +$$

$$+ r^2 - \frac{b^2}{4} = r^2 - 2rx + x^2,$$

или

$$x^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - bx\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2x\cdot\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = -2rx,$$

или

$$x\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = b\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r.$$

Отсюда

$$x = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(b\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r\right).$$

590. Так как точки M и B принадлежат плоскости грани $ABCD$, то прямая MB пересечет ребро AD в некоторой точке K (рис. 128). Из подобия треугольников MBC и MKD следует, что $\frac{KD}{BC} = \frac{MD}{MC}$. Но так как $MD = 2BC$, а $MC = 3BC$, то пропорция принимает вид $\frac{KD}{BC} = \frac{2BC}{3BC}$. Отсюда $KD = \frac{2}{3}BC$. Следовательно, точка K делит ребро AD в отношении $1:2$. Точка M и середина E ребра SC

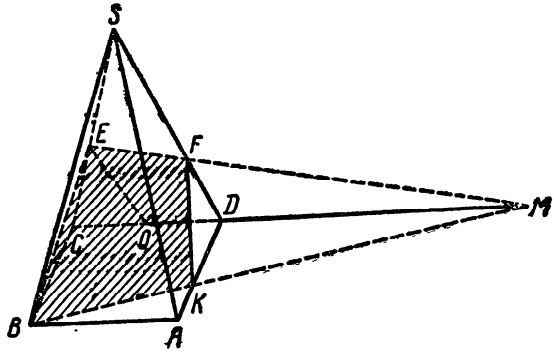

Рис. 128

принадлежат плоскости грани SDC, поэтому прямая ME пересекает ребро SD в некоторой точке F. Средняя линия EO треугольника SCD равна $\frac{SD}{2}$. Из подобия треугольников MFD и MEO следует, что $\frac{DF}{OE} = \frac{MD}{MO}$. Отсюда находим $DF = \frac{4}{5}OE = \frac{2}{5}SD$.

Следовательно, точка F делит ребро SD в отношении $3:2$. Таким образом, плоскость сечения пересекает пирамиду по четырехугольнику $KBEF$. Выразим объем многогранника $BECKFD$ через объем V данной пирамиды. Очевидно, что объем этого многогранника равен разности объемов треугольных пирамид $EMCB$ (V_1) и $FDMK$ (V_2). Так как точка E — середина ребра SC, то перпендикуляр, опущенный из этой точки, равен половине перпендикуляра H, опущенного из точки S на плоскость $ABCD$, т. е. он равен $\frac{H}{2}$. Если обозначить ребро основания пирамиды через a, то площадь прямоугольного треугольника MBC равна

$$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot MC = \frac{3a^2}{2}.$$

Следовательно, $V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{3a^2}{2}=\frac{3}{4}V$, так как $V=\frac{a^2H}{3}$.

Теперь найдем объем пирамиды $FDMK$.

Поскольку точка F делит ребро SD в отношении $3:2$, то перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость $ABCD$, равен $2/5$ перпендикуляра, опущенного из точки S на ту же плоскость $ABCD$, т. е. он равен $\frac{2}{5}H$. Площадь треугольника MDK равна

$$\frac{1}{2}\cdot DK\cdot MD=\frac{2}{3}a^2.$$

Следовательно, объем пирамиды $FMKD$

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{2H}{5}\cdot\frac{2a^2}{3}=\frac{4}{15}V.$$

Таким образом, объем многогранника $BECKFD$ равен

$$V_1-V_2=\frac{3}{4}V-\frac{4}{15}V=\frac{29}{60}V.$$

Значит, плоскость сечения делит объем пирамиды в отношении $29:31$.

Отв. $29:31$.

591. Данное уравнение перепишем в виде

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\cos 2x-\cos 6x}{2}+\frac{\cos 6x-\cos 12x}{2}+$$
$$+\cdots+\frac{\cos(n^2-n)x-\cos(n^2+n)x}{2}=1,$$

или

$$\frac{1-\cos(n^2+n)x}{2}=1,\ \text{т. е. } \cos(n^2+n)x=-1,$$

откуда $(n^2+n)x=\pi\cdot(2k+1)$ и $x=\frac{\pi(2k+1)}{n(n+1)}$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$

592. Так как $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x(4\cos^2 x-1)$, а $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$, то данное уравнение можно переписать в таком виде

$$\sin x\cdot(4\cos^2 x+2\cos x-a-1)=0.$$

Это уравнение распадается на два

$$\sin x=0\ \text{ и }\ 4\cos^2 x+2\cos x-a-1=0.$$

Из первого уравнения имеем $x=n\pi$, а из второго получаем

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}.$$

Должно быть при $\cos x=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{4a+5}\right)$

$$4a+5\geqslant 0\ \text{ и }\ -1\leqslant\frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}\leqslant 1.$$

Решая совместно эти неравенства, получим $-\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 1$. Таким образом, если $-\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 1$, то данное уравнение имеет решения $x=n\pi$, $x=2m\pi\pm\arccos\frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$; при совместном решении системы неравенств $-1\leqslant\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}\leqslant 1$ и $4a+5\geqslant 0$ получим $-\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 5$. Таким образом, учитывая условия существования решения уравнения $\cos x=\frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$, окончательно имеем: если $-\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 1$, то $x_1=n\pi$, $x_2=2n\pi\pm\arccos\frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$, $x_3=2n\pi\pm$ $\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}$; если $1<a\leqslant 5$, то $x_1=n\pi$, $x_2=2n\pi\pm$ $\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}$; если $a<-\frac{5}{4}$ или $a>5$, то $x=n\pi$.

593. Первое решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$1+\frac{2}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geqslant 3+2\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Так как

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}},$$

то

$$1+\frac{2}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geqslant 1+\frac{2}{\sin 2\alpha}+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}\geqslant 1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (1), а потому верно и доказываемое.

Второе решение. Обозначим левую часть доказываемого неравенства через A.

Имеем

$$A=1+\frac{\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+1}{0{,}5\sin 2\alpha}=1+\frac{2\left(\sqrt{1+\sin 2\alpha}+1\right)}{\sin 2\alpha}=$$

$$= 1 + \frac{2(1 + \sin 2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha\left(\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - 1\right)} = 1 + \frac{2}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - 1}.$$

Так как $\sqrt{1+\sin 2\alpha} \leqslant \sqrt{2}$, то

$$A \geqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 1 + 2\left(\sqrt{2} + 1\right) = 3 + 2\sqrt{2}.$$

594. Заменим данную систему неравенств одним неравенством, равносильным ей

$$\left(2 - \frac{3x - 1}{2x + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{3x - 1}{2x + 1}\right) < 0,$$

или

$$\frac{(x + 3) \cdot (x - 2)}{(2x + 1)^2} > 0. \qquad (1)$$

Так как $(2x+1)^2>0$, $\left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$, то неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 3)(x - 2) > 0, \\ x \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x>2$ или $x<-3$.

Отв. Все числа из промежутков $(-\infty, -3)$, $(2, \infty)$.

595. Пусть $\dfrac{\sqrt{1 + x \cdot \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} = A.$

Имеем

$$A = \frac{\left(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} - \sqrt{\cos 2x}\right)\left(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + \sqrt{\cos 2x}\right)}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\left(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + \sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \frac{1 + x \cdot \sin x - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\left(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + \sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 x + x \cdot \sin x}{\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2\left(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + \sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \frac{(2 \sin x + x)(1 + \cos x)^2}{\sin x\left(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + \sqrt{\cos 2x}\right)}.$$

Поделив числитель и знаменатель на $\sin x$, получим

$$A=\frac{\left(2+\frac{x}{\sin x}\right)(1+\cos x)^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2+\frac{x}{\sin x}\right)\cdot(1+\cos x)^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\sin x)=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}A=\frac{(2+1)\cdot(1+1)^2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1}}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$,

что и требовалось доказать.

596. Пусть $\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=f(x)$. Имеем

$$f(x)=\frac{1-\cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4}=\frac{2\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4}=$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}:\frac{16\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4}{\sin^4\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\cdot\left[\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]^2.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=1$, то

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\cdot\left[\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 1^4\cdot 1^2=\frac{1}{8}.$$

597. Пусть O — центр вписанной окружности в треугольник ABC (рис. 129), $CD \perp AB$. Из треугольника APB в силу теоремы синусов имеем $\frac{BP}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{AB}{\sin\frac{3\pi}{8}}$. Так как $AB = a\sqrt{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$, то $BP = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8}}$ и так как $BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$, то

$$BO = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8}}.$$

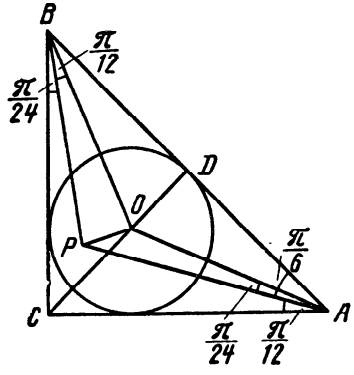

Рис. 129

Следовательно, треугольник PBO равнобедренный, а потому $\frac{PO}{2} = \frac{a\sin\frac{\pi}{24}}{\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8}}$. Отсюда находим

$$PO = \frac{a\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{\pi}{8}} =$$

$$= a\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{8}} =$$

$$= a\sqrt{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= a\sqrt{2}\left[\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= a\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot a.$$

598. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC боковыми сторонами служат AC и BC (рис. 130), CD — высота, O — центр описанной окружности, O_1 — центр вписанной окружности. Так как треугольник ABC равнобедренный, то O и O_1 принадлежат прямой CD, и ясно, что расстояние между O и O_1 равно $|CO-CO_1|$ для любого равнобедренного треугольника. По известной формуле радиус описанной окружности $CO=\dfrac{b}{2\sin\alpha}$. Имеем

$$CO_1 = CD - O_1D = b\cdot\sin\alpha - AD\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= b\cdot\sin\alpha - b\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

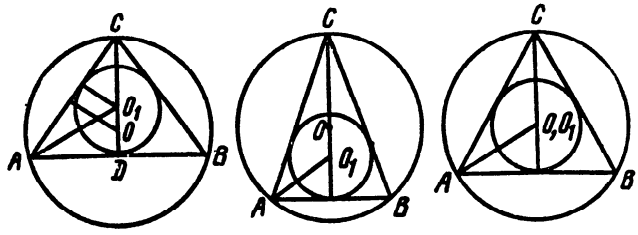

Рис. 130

следовательно,

$$OO_1 = \left|\frac{b}{2\sin\alpha} - b\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= b\left|\frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right| =$$

$$= b\left|\frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right| = \frac{b}{2\sin\alpha}\left|1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= \frac{b}{2\sin\alpha}\left|4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 3\right| = \frac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left|4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= \frac{b\left|\cos\dfrac{3\alpha}{2}\right|}{2\sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

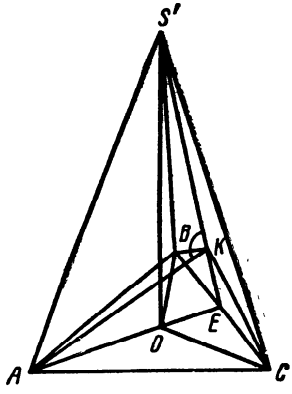

Рис. 131

Отв. $\dfrac{b\left|\cos\dfrac{3\alpha}{2}\right|}{2\sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

599. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида (рис. 131) с равносторонним основанием ABC и пусть SO — высота пирамиды, AE — высота треугольника ABC, SE — апофема пирамиды, AK — высота треугольника ASE. Так как $SE\perp BC$ и $AE\perp BC$, то прямая BC перпендикулярна плоскости треугольника AES. Но так как прямая AK принадлежит плоскости треугольника AES, то прямые (скрещивающиеся) AK и BC взаимно перпендикулярны. Таким образом, $AK\perp SE$ и $AK\perp BC$, а потому прямая AK перпендикулярна плоскости BSC. Введем обозначения: $SO=h$, площадь треугольника ABC — S_1, площадь треугольника SBC — S_2. Объем пирамиды $SABC$

$$V=\frac{1}{3}S_1\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot h. \qquad (1)$$

Объем той же пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_2\cdot b. \qquad (2)$$

Из прямоугольного треугольника SOE находим $SE=\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{12}}$, а потому площадь треугольника SBC равна

$$S_2=\frac{1}{2}a\cdot SE=\frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2) и (3) следует, что

$$\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}=\frac{ab}{6}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}},$$

откуда находим

$$h=\frac{ab}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3a^2-4b^2}}.$$

Подставляя полученное значение h в формулу (1), получим

$$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{ab}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3a^2-4b^2}}=\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}.$$

600. Пусть сторона основания пирамиды равна a, а радиус вписанного в нее шара равен r. И пусть прямые SE и SF касаются этого шара (рис. 132), следовательно, $MF=ME=ML$ (M — основание высоты пирамиды). Через вершину A основания проведем прямую $B_1AD_1 \| BD$ и в плоскости ASC другую прямую AK, касательную к вписанному шару, т. е. касательную к окружности большого круга шара. Через прямые B_1AD_1 и AK проводим плоскость. Эта плоскость пересекает пирамиду по четырехугольнику $ANKT$. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны и $NT \| BD$,

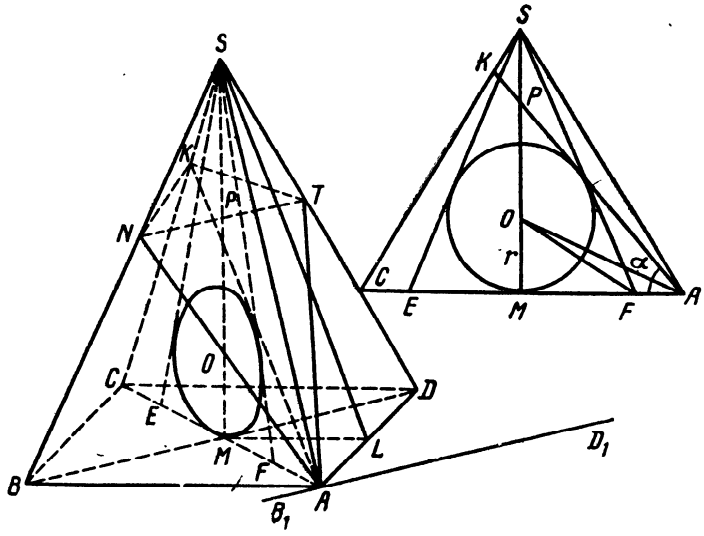

Рис. 132

так как прямая B_1AD_1 параллельна прямой BD плоскости SBD и B_1AD_1 перпендикулярна AK плоскости SAC. В треугольнике SMF прямая FO (O — центр шара) биссектриса, а потому $OM : OS = MF : SF$. Отсюда

$$OM = r = \frac{MF \cdot OS}{SF}.$$

Имеем $MF = ML = \frac{a}{2}$, $OS = SM - OM = a\sqrt{2} - r$, $SF = \sqrt{SM^2 + MF^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$. Таким образом, $r = \frac{\frac{a}{2} \cdot (a\sqrt{2} - r)}{\frac{3a}{2}}$. Отсюда находим $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Пусть $\angle KAC=\alpha$. Из треугольника AOM имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{OM}{AM}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$. В треугольнике SMD отношение $\frac{MD}{SM}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$, следовательно, $\angle MSD=\frac{\alpha}{2}$, а потому $\angle ASC=\alpha$.

Тогда $\angle SCA=\angle SAC=90°-\frac{\alpha}{2}$. В треугольнике AKC имеем: $\angle A=\alpha$, $\angle C=90°-\frac{\alpha}{2}$, а потому $\angle K=90°-\frac{\alpha}{2}$, а потому $AK=AC=a\sqrt{2}$.

Пусть P — точка пересечения прямых SM и AK. Из треугольника AMP находим $MP=AM\cdot\operatorname{tg}\alpha$, но $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$. Поэтому $MP=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}a\sqrt{2}=\frac{2}{3}SM$, следовательно, $SP=\frac{1}{3}SM$. Вследствие этого $NT=\frac{1}{3}BD=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Площадь сечения $S=\frac{1}{2}AK\cdot NT=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3}=\frac{a^2}{3}$. Площадь основания пирамиды $S_1=a^2$. Таким образом,

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{3}:a^2=\frac{1}{3}.$$

Отв. 1/3.

601. Умножив обе части уравнения на $\sin x\cdot\cos x$, получим

$$\sin x+\cos x+1=a\cdot\sin x\cdot\cos x,\text{ или }a=\frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}.$$

Итак, имеем

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=a,$$

или

$$\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=a.$$

Поделив числитель и знаменатель левой части последнего уравнения на $\sin^2\frac{x}{2}$, получим

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-1}=a, \text{ или } \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-a\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+a+1=0.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-a-1}$$

$$\text{и } x=2\operatorname{arcctg}\left(\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-a-1}\right)+2n\pi.$$

Для того чтобы x был действительным, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $a^2-4a-4\geqslant 0$. Так как корни левой части этого неравенства суть $2+2\sqrt{2}$ и $2-2\sqrt{2}$, то $a\geqslant 2+2\sqrt{2}$ или $a\leqslant 2-2\sqrt{2}$.

602. Если $x\geqslant 0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-4x+3<0 \qquad (1)$$

Поскольку корнями левой части неравенства (1) служат числа 1 и 3, то (1) имеет место при

$$1<x<3. \qquad (2)$$

Если же

$$x<0, \qquad (3)$$

то решаемое неравенство равносильно неравенству $-x^2-4x+3<0$, или

$$x^2+4x-3>0. \qquad (4)$$

Так как числа $-2\pm\sqrt{7}$ являются корнями левой части неравенства (4), то оно имеет место

$$\text{при } x<-2-\sqrt{7} \text{ или при } x>-2+\sqrt{7}. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) заключаем, что, кроме (2), решениями данного неравенства являются все числа из промежутка $x<-2-\sqrt{7}$.

Отв. Все числа из промежутков: $-\infty<x<-(2+\sqrt{7})$, $1<x<3$.

603. Пусть $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}=f(\alpha)$.

Имеем

$$f(\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha^3}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^3}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha\to0}f(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to0}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1^2=\frac{1}{2}.$$

604. Обозначим расстояние OC от центра окружности радиуса r до хорды AB через a (рис. 133). Из прямоугольного треугольника OBC имеем $a=r\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Проведем прямую через O и центр O_1 окружности, радиус которой мы должны определить. Пусть эта прямая пересекает окружность центра O_1 в точках M и N. Имеем $OM\cdot ON=OD^2$, где D — точка касания прямой OC к окружности искомого радиуса, или

$$(r-2x)\cdot r=(a+x)^2,$$

где x — искомый радиус, или

$$x^2+2(r+a)x+a^2-r^2=0.$$

Так как $a<r$, то $a^2-r^2<0$, а потому корни этого уравнения различных знаков. Положительный корень этого уравнения

$$x=-(r+a)+\sqrt{r^2+2ar+a^2-a^2+r^2},$$

или

$$x=-(r+a)+\sqrt{2r(r+a)}.$$

Но так как $a=r\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$, то

$$x = \sqrt{2r \cdot 2r \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{4}} - 2r \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{4} =$$

$$= 2r \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \left(1 - \cos \frac{\alpha}{4}\right).$$

Отв. $4r \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{8}$.

605. Пусть A, B, C — центры шаров, а M, N, K — соответственно точки касания этих шаров с цилиндрической поверхностью (рис. 134). Так как радиусы шаров равны r, то $AC=2r$, $BC=2r$, $CF=r$. Следовательно, $AF=BF=r\sqrt{3}$, $ON_1=x$ (x — искомый радиус), $O_2F=LC=LK-CK=x-r$.

Из прямоугольного треугольника AO_2E имеем

$$O_2E = \sqrt{(x-r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2rx}.$$

Из рисунка усматриваем, что

$$EF = x - r + \sqrt{x^2 - 2rx}.$$

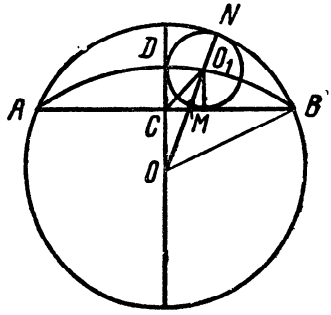

Рис. 133

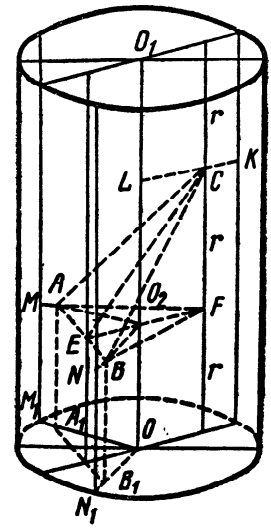

Рис. 134

Из прямоугольного треугольника ACE находим

$$CE = r\sqrt{3},$$

а из треугольника CEF следует

$$EF = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$x - r + \sqrt{x^2 - 2rx} = r\sqrt{2},$$

или

$$\sqrt{x^2 - 2rx} = r \cdot (\sqrt{2} + 1) - x,$$

или

$$x^2 - 2rx = \left(3 + 2\sqrt{2}\right) r^2 - 2rx \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) + x^2,$$

откуда

$$x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot r.$$

Отв. $\dfrac{3\sqrt{2} + 4}{4} \cdot r$.

606. а) Если $n = 1$, то данное уравнение имеет вид $\cos x - \sin x = 1$, или $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, или $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отсюда $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}$, где $k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots$

б) Если $n = 2m$ — четное число, то данное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^{2m} x = 1 + \sin^{2m} x. \qquad (1)$$

Поскольку $\cos^{2m} x \leqslant 1 \leqslant 1 + \sin^{2m} x$, то уравнение (1) выполняется лишь когда

$$\sin x = 0 \text{ и } \cos x = \pm 1.$$

Оба эти уравнения выполняются одновременно только при $x = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

в) Если $n = 2m + 1$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, то предложенное уравнение запишется так

$$\cos^{2m+1} x - \sin^{2m+1} x = 1,$$

или в силу четности $\cos x$ и нечетности $\sin x$ имеем

$$\cos^{2m+1}(-x) + \sin^{2m+1}(-x) = 1. \qquad (1)$$

Ясно, что это уравнение выполняется в двух случаях:

когда одновременно $\cos^{2m+1}(-x) = 0$ и $\sin^{2m+1}(-x) = 1$, или когда одновременно $\cos^{2m+1}(-x) = 1$ и $\sin^{2m+1}(-x) = 0$, т. е. когда $x_1 = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}$ или $x_2 = 2k\pi$. Докажем, что уравнение (1), кроме найденных решений, не имеет решений. В самом деле, если $x \neq x_1$ и $x \neq x_2$, то

$$\left|\cos^{2m+1}(-x) + \sin^{2m+1}(-x)\right| \leqslant \left|\cos^{2m+1}(-x)\right| + \left|\sin^{2m+1}(-x)\right| =$$

$$= \left|\cos^{2m-1}(-x)\right| \cdot \cos^2(-x) +$$

$$+ \left|\sin^{2m-1}(-x)\right| \cdot \sin^2(-x) < \cos^2(-x) + \sin^2(-x) = 1,$$

что и доказывает, что если $n = 2m + 1$, то уравнение (1) имеет лишь решения $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}$.

607. Для того чтобы корни данного уравнения были действительными, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицателен, т. е. должно иметь место неравенство

$$1-\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\geqslant 0$$

или

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\leqslant 1. \tag{1}$$

Для того чтобы уравнение имело смысл, должно быть $\cos\alpha\neq 0$. Следовательно, возможны два случая: $\cos\alpha>0$ и $\cos\alpha<0$. Если $\cos\alpha<0$, т. е. при

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,$$

неравенство (1) выполняется. Но так как по условию $\alpha\neq k\pi$, то

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi, \tag{2}$$

$$\pi+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi. \tag{3}$$

Если же $\cos\alpha>0$, то неравенство (1) перепишется так: $\sin^2\alpha\leqslant\cos\alpha$, или $\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\geqslant 0$. Отсюда $\cos\alpha\leqslant-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ или $\cos\alpha\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Но так как $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}<-1$, то имеем только $\cos\alpha\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отсюда

$$-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi, \tag{4}$$

$$2k\pi<\alpha\leqslant\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi. \tag{5}$$

Итак, все искомые значения параметра α находятся в промежутках (2), или (3), или (4), или (5).

608. Функция $\sqrt{3-x}$ определена, если $3-x\geqslant 0$, т. е. при $x\leqslant 3$, а функция $\sqrt{x+1}$ определена при $x\geqslant -1$. Таким образом, левая часть решаемого неравенства определена при $-1\leqslant x\leqslant 3$.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}.$$

Так как $\frac{1}{2}\sqrt{x+1}>0$, то и $\sqrt{3-x}>0$. Следовательно,

$$\left(\sqrt{3-x}\right)^2>\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

или

$$3-x>\frac{1}{4}+\sqrt{x+1}+x+1,$$

или

$$7-8x>4\sqrt{x+1}.$$

Это неравенство не имеет решений при всех x, для которых $7-8x\leqslant 0$, т. е. для всех $x\geqslant\frac{7}{8}$, так как $4\sqrt{x+1}>0$. Значит, $x<\frac{7}{8}$. Следовательно, должно быть $-1\leqslant x<\frac{7}{8}$. Учитывая возможные значения x, имеем

$$(7-8x)^2>16\left(\sqrt{x+1}\right)^2$$

или

$$64x^2-128x+33>0.$$

Так как корни левой части этого неравенства $1\pm\frac{\sqrt{31}}{8}$, то либо $x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$, либо $x>1+\frac{\sqrt{31}}{8}$. Но поскольку $1+\frac{\sqrt{31}}{8}>\frac{7}{8}$, то остается $x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$.

Далее, так как $1-\frac{\sqrt{31}}{8}<\frac{7}{8}$, то всеми решениями данного неравенства являются все числа из промежутка $-1\leqslant x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$.

Отв. $-1\leqslant x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$.

609. Сразу заметим, что $x\neq 0$, так как при $x=0$ имеет место равенство.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\frac{\left(\sqrt{1+2x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{\sqrt{1+2x}+1},$$

или

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\frac{2x}{\sqrt{1+2x}+1},$$

или

$$2x\left(\sqrt{1+2x}+1-\sqrt{2x+9}\right)<0.$$

Для того чтобы радикал $\sqrt{1+2x}$ был действительным, необходимо и достаточно, чтобы $1+2x\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant -\frac{1}{2}$, а для того, чтобы радикал $\sqrt{2x+9}$ был действительным числом, отличным от нуля, необходимо и достаточно, чтобы $2x+9>0$, откуда $x>-\frac{9}{2}$.

Таким образом, для того, чтобы оба радикала были одновременно действительными, надо чтобы $x\geqslant -\frac{1}{2}$.

Если $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$, то $\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x+9}+1>0$, или

$$\sqrt{1+2x}+1>\sqrt{2x+9},$$

или

$$1+2x+2\sqrt{1+2x}+1>2x+9,$$

или

$$2\sqrt{1+2x}>7.$$

Отсюда $x>\frac{45}{8}$, что противоречит неравенству $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$. Теперь пусть $x>0$, тогда $\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x+9}+1<0$. Решая это неравенство, получим $x<\frac{45}{8}$.

Отв. Все числа из промежутка $0<x<\frac{45}{8}$.

610. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{x^2-\alpha^2}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos 2\alpha-\cos 2x}{2(x^2-\alpha^2)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)}{(x+\alpha)\cdot(x-\alpha)}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x+\alpha)}{x+\alpha}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cdot 1=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha},$$

что и требовалось доказать.

611. Пусть $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x=f(x)$. Имеем

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}},$$

Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos 0 = 1$, а

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1, \text{ то } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

612. По условию, $ABCD$ — параллелограмм, у которого $\angle A = \alpha = \arccos\frac{5}{16}$, $KL\perp EF$ (рис. 135), четырехугольники $AKOE$, $BKOF$, $CFLO$ и $LOED$ — равновелики, $AB=CD=2$ *см*, $AD=BC=3$ *см*. Пусть $AK=x$, тогда $BK=2-x$. Равновеликие трапеции $AKLD$ и $KBCL$ имеют общую высоту, поэтому $AK+LD=BK+CL=2$ *см*. Следовательно, $CL=x$, $DL=2-x$. Аналогично, если $BF=y$, то $ED=y$, $AE=FC=3-y$. В треугольниках KBF и EDL $BK=DL$, $BF=DE$, $\angle B=\angle D$. Следовательно, треугольники KBF и EDL равны между собой, а потому $\angle BFK=\angle LED$. Из равенства этих углов следует, что $KF\parallel EL$. Так же доказывается, что $KE\parallel FL$, а поэтому четырехугольник $EFKL$ — параллелограмм, в котором $KL\perp FE$; следовательно, $EFKL$ — ромб. Так как треугольники AKE и BKF равновелики, то

$$\frac{1}{2}x\cdot(3-y)\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}y\cdot(2-x)\cdot\sin(180^\circ-\alpha),$$

т. е.

$$3x = 2y.$$

Из треугольников AKE и BKF имеем

$$KE^2 = x^2 + (3-y)^2 - 2x\cdot(3-y)\cdot\frac{5}{16},$$

$$KF^2 = (2-x)^2 + y^2 + 2y\cdot(2-x)\cdot\frac{5}{16}.$$

Но поскольку $KE=KF$, то

$$x^2 + (3-y)^2 - 2x\cdot(3-y)\cdot\frac{5}{16} = (2-x)^2 + y^2 + 2y\cdot(2-x)\cdot\frac{5}{16},$$

или после упрощений

$$10xy + 17x - 58y + 40 = 0.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 10xy + 17x - 58y + 40 = 0, \\ 3x = 2y. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем $y = \frac{3x}{2}$.

Подставляя это значение y в первое уравнение, получим после преобразований

$$3x^2 - 14x + 8 = 0.$$

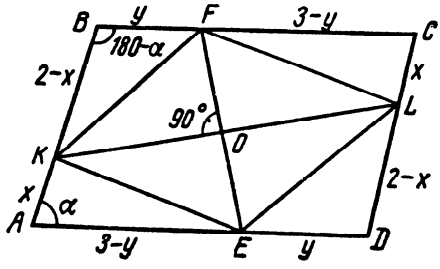

Рис. 135

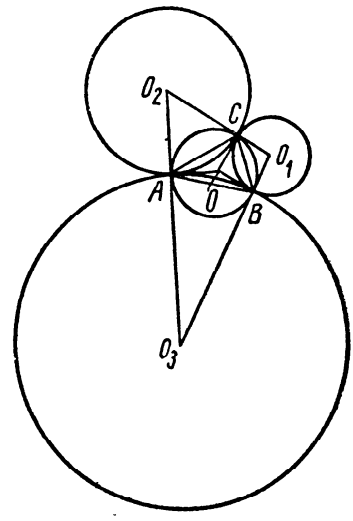

Рис. 136

Корнями этого уравнения служат $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Но так как $x < 2$, то только $x = \frac{2}{3}$ удовлетворяет условиям задачи.

Отв.

$$AK = CL = \frac{2}{3}\ см, \quad BK = DL = 1\frac{1}{3}\ см,$$

$$BF = ED = 1\ см, \quad CF = AE = 2\ см.$$

613. Пусть центры окружностей O_1, O_2, O_3 (рис. 136) и пусть радиусы окружностей x, $2x$, $3x$. Пусть окружности с центрами O_2 и O_3 касаются в точке A, окружности с центрами O_1 и O_3 касаются в точке B, а окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке C. Положим, что $O_2O_3 = a$, $O_3O_1 = b$, $O_1O_2 = c$. Тогда $O_1C = O_1B = p - a$, $O_2A = O_2C = p - b$, $O_3B = O_3A = p - c$, где p — полупериметр треугольника $O_1O_2O_3$. Отсюда следует, что окружность, проходящая через точки A, B и C, вписана в треугольник $O_1O_2O_3$. Треугольник $O_1O_2O_3$ — прямоугольный, катет $O_1O_2 = 3x$, катет $O_1O_3 = 4x$, гипотенуза $O_2O_3 =$

$=5x$. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. Тогда

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{\pi}{4},\ \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=$$

$$=\frac{1}{2}(\pi-\angle O_1O_3O_2)=\frac{1}{2}\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}3;$$

$$\angle CBA=\frac{1}{2}\angle COA=\frac{1}{2}(\pi-\angle O_1O_2O_3)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}2.$$

Отв. $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}2$, $\operatorname{arctg}3$.

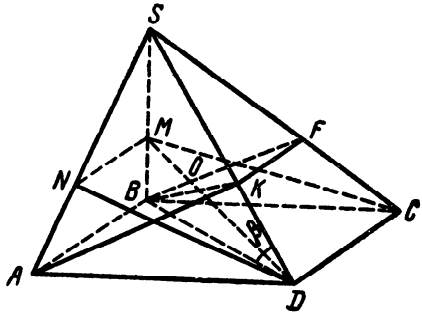

Рис. 137

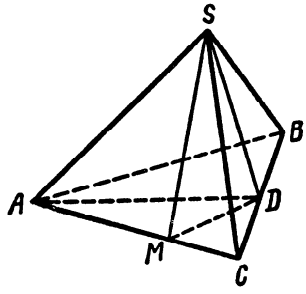

Рис. 138

614. Докажем, что в данную пирамиду можно вписать шар (рис. 137). Пусть SDB — биссекторная плоскость двугранного угла $ASDC$ и двугранного угла $ABSC$. Построим $MCDN$ — биссекторную плоскость двугранного угла $SCDA$. Прямая MD — линия пересечения этих двух биссекторных плоскостей, так как она принадлежит им обеим.

Построим $KABF$ — биссекторную плоскость двугранного угла $SABC$. BK — линия пересечения этой плоскости с плоскостью SBD. Прямые MD и BK, лежащие в плоскости SBD, пересекаются в точке O, равноудаленной от всех граней пирамиды. Следовательно, точка O — центр шара, вписанного в пирамиду.

Пусть V — объем пирамиды, S — полная поверхность ее, r — радиус вписанного шара, тогда

$$r=\frac{3V}{S}. \qquad (1)$$

Действительно, если данную пирамиду разбить на 5 пирамид с общей вершиной O и основаниями $ABCD$, SAB, SCD, SBC и SDA,

то высотой каждой из них служит радиус вписанного шара. Следовательно,

$$V=\frac{r}{3}\left(S_{ABCD}+S_{SAB}+S_{SBC}+S_{SCD}+S_{SDA}\right),$$

т. е. равенство (1) справедливо.

Пусть $SB=H$ — высота пирамиды, a — сторона основания. Из треугольника SBD имеем

$$H=a\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно,

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta}{3}. \qquad (2)$$

Из треугольника SAB находим

$$SA=\sqrt{a^2+2a^2\operatorname{tg}^2\beta}=a\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Далее, $SC=SA$ как наклонные, исходящие из одной точки и имеющие равные проекции.

Так как $AB\perp AD$, то $SA\perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах); по аналогии $SC\perp CD$. Итак,

$$S=a^2+a^2\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta+a^2\cdot\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta},$$

или

$$S=a^2\left(1+\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}\right).$$

Поэтому, учитывая (1), (2) и (3), получаем

$$r=\frac{3V}{S}=\frac{a\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}}.$$

Отв. $\dfrac{a\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}}$.

615. $SABC$ — данная пирамида; SD — высота ее (рис. 138). В предыдущей задаче мы установили, что

$$r=\frac{3V}{S_{\text{полн}}}.$$

Из прямоугольного треугольника ADC находим, что

$$AD=\sqrt{5^2-3^2}=4,$$

следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=3\cdot4=12,$$

а объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot SD=\frac{1}{3}\cdot12\cdot1=4.$$

Проводим $SM \perp AC$; тогда $DM \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Так как треугольник ADC прямоугольный, то

$$DM = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4.$$

В треугольнике SMD угол D прямой, поэтому

$$SM = \sqrt{MD^2 + SD^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 1^2} = 2{,}6,$$

а следовательно,

$$S_{\triangle ASC} = S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}6 = \frac{13}{2}.$$

Найдем площадь треугольника BSC;

$$S_{\triangle BSC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3.$$

Итак,

$$S_{\text{полн}} = S_{\triangle ABC} + 2S_{\triangle ASC} + S_{\triangle BSC} = 12 + 2 \cdot \frac{13}{2} + 3 = 28,$$

$$r = \frac{3 \cdot 4}{28} = \frac{3}{7}.$$

Отв. $\frac{3}{7}$.

616. В самом деле, $\frac{2(a^2+b^2)-ab}{2ab} = \frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{1}{2}$. Так как $\frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant 2$, то $\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{2}$, в то время как

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right| =$$

$$= \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Таким образом, правая часть не меньше 3/2, а левая при любом значении x меньше 3/2, а потому уравнение не имеет решений.

617. Функция $\sqrt{1-9x^2}$ определена, если $1-9x^2 \geqslant 0$, т. е. когда

$$-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Должно еще быть

$$x \neq 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что областью допустимых значений является множество всех x из промежутков

$$-\frac{1}{3}\leqslant x<0,\quad 0<x\leqslant\frac{1}{3}. \tag{3}$$

1) Рассмотрим данное неравенство для тех x, которые принадлежат промежутку $0<x\leqslant\frac{1}{3}$. Поскольку $x>0$, то данное неравенство равносильно неравенству $1-\sqrt{1-9x^2}<x$, или

$$1-x<\sqrt{1-9x^2}. \tag{4}$$

Так как $x\leqslant\frac{1}{3}$, то обе части (4) неотрицательны, а поэтому имеем $(1-x)^2<1-9x^2$, или

$$5x^2-x<0. \tag{5}$$

Но так как $x>0$, то из (5) следует, что $5x-1<0$, откуда

$$x<\frac{1}{5}. \tag{6}$$

Из (6) и второго из неравенств (3) заключаем, что $0<x<\frac{1}{5}$.

2) Теперь будем искать решения данного неравенства в промежутке $-\frac{1}{3}\leqslant x<0$. Так как $x<0$, то данное неравенство равносильно такому:

$$1-\sqrt{1-9x^2}>x. \tag{7}$$

Поскольку $-\frac{1}{3}\leqslant x<0$, то левая часть неравенства (7) положительна, а следовательно, всегда больше отрицательного x. Таким образом, решением данного неравенства являются все x из промежутков $\left[-\frac{1}{3},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{1}{5}\right)$.

618. Имеем

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2\cdot\sin(\pi-x)}{(\pi+x)(\pi-x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2}{\pi+x}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2}{\pi+x}=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1,\ \text{то}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

619. Пусть O — центр большей окружности, а O_1 — центр меньшей окружности, AB — общая внешняя касательная, CD — общая внутренняя касательная, OM — касательная к меньшей окружности (рис. 139). В силу условия задачи $\angle K=\frac{\alpha}{2}$, $\angle CLO=\frac{\beta}{2}$. Угол BOO_1 — половина искомого угла. Пусть $\angle BOO_1=x$, $OA=R$, $O_1B=r$, $OO_1=d$. Проведем O_1E параллельно AB и O_1F — параллельно CD. Из треугольника OO_1E имеем $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R-r}{d}$, а из треугольника OO_1F следует $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{R+r}{d}$. Последние два равенства перепишем так

$$\frac{R}{d}-\frac{r}{d}=\sin\frac{\alpha}{2},\quad \frac{R}{d}+\frac{r}{d}=\sin\frac{\beta}{2}.$$

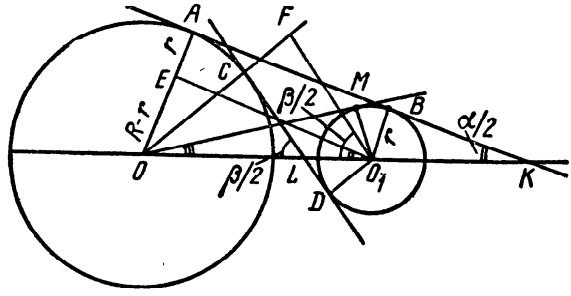

Рис. 139

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$2\cdot\frac{r}{d}=\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Ясно, что $O_1M\perp OB$. Из прямоугольного треугольника OMO_1 имеем

$$\frac{OM}{OO_1}=\frac{r}{d}=\sin x. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $2\sin x=\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$x=\arcsin\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Ответ. $2\arcsin\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]$.

620. Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 140), $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$ и SO перпендикулярно к плоскости ABC. Введем обозначения

$$SO = h,\ \angle OSA = \alpha,\ \angle OSB = \beta,\ \angle OSC = \gamma.$$

Если считать точку S вершиной прямоугольного параллелепипеда, ребра которого расположены на прямых SA, SB и SC, а диагональ расположена на прямой SO, то имеет место равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Но $\cos\alpha = \frac{h}{a}$, $\cos\beta = \frac{h}{b}$, $\cos\gamma = \frac{h}{c}$.

Следовательно,

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1,$$

или

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

откуда

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

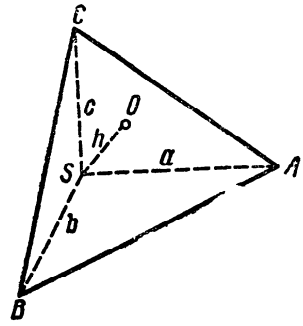

Рис. 140

621. Известно, что дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Таким образом, должны одновременно иметь место соотношения

$$\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1 \qquad (1)$$

и

$$a + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 7x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \neq 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) выполняется или когда

$$\sin 3x = 1 \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1, \qquad (3)$$

или когда $\sin 3x = -1$ и $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = 1.$ (4)

Из равенств (3) получаем

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ и } x = \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{3},$$

или $4k+1=3m+2$, или $k-1=3(m-k)$. Отсюда $k=1+3t$, где t— целое. Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi\cdot(1+3t)=\frac{5\pi}{6}+2t\cdot\pi. \qquad (5)$$

Из равенств (4) имеем

$$3x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ и } 4x-\frac{\pi}{3}=2m\pi,$$

или

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \text{ и } x=\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{2}.$$

Значит,

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{2}.$$

Отсюда $8k-6m=3$, что невозможно, так как левая часть четная, а правая нечетная. Следовательно, соотношения (4) не дают решения.

Наконец, подставляя значение x из (5) во (2), находим $a\neq 2$. Итак, уравнение имеет решения при любом $a\neq 2$ и все решения определяются формулой (5).

622. Известно, что $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. Откуда $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$. Таким образом, данное уравнение можно переписать в таком виде

$$(\arcsin x)^3+\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)^3=a\cdot\pi^3.$$

Обозначим $\arcsin x$ через y. Тогда

$$y^3+\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^3=a\cdot\pi^3,$$

которое приводится к такому уравнению

$$3y^2-\frac{3\pi}{2}\cdot y+\left(\frac{1}{4}-2a\right)\cdot\pi^2=0.$$

Отсюда

$$y=\pi\cdot\frac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{24\left(a-\frac{1}{32}\right)}}{6}.$$

Следовательно, при $a<\frac{1}{32}$ уравнение не имеет решения.

623. Перепишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}\geqslant 2. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что левая часть решаемого неравенства определена при

$$x\geqslant 1. \qquad (2)$$

Неравенство (1) можно переписать в виде

$$\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|\geqslant 2. \qquad (3)$$

Если $\sqrt{x-1}\geqslant 1$, т. е. если $x\geqslant 2$, то неравенство принимает вид $\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\geqslant 2$, откуда

$$x\geqslant 2. \qquad (4)$$

Если же $\sqrt{x-1}<1$, т. е. когда $1\leqslant x<2$, то неравенство (3) вырождается в равенство: $2=2$.

Из неравенств (2), (4) и (5) следует, что решением данного неравенства служит множество всех чисел $x\geqslant 1$.

624. Функция $\sqrt{x-1}$ определена при

$$x\geqslant 1. \qquad (1)$$

Также должно быть $x-2\sqrt{x-1}>0$ и $x+2\sqrt{x-1}>0$, или $x>2\sqrt{x-1}$ и $x>-2\sqrt{x-1}$. Из $x>2\sqrt{x-1}$ следует $(x-2)^2>0$, что имеет место при любом

$$x\neq 2. \qquad (2)$$

Неравенство $x>-2\sqrt{x-1}$ справедливо для любых x из промежутка (1).

Из (1) и (2) заключаем, что

$$1\leqslant x<2,\quad x>2.$$

Данное неравенство можно записать так:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{x-1})^2}}+\frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{x-1})^2}}>2. \qquad (3)$$

1) Пусть $1\leqslant x\leqslant 2$. (4)

Тогда из (3) и (4) следует

$$\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{1-\sqrt{x-1}}>2, \text{ или}$$

$$\frac{2}{2-x}>2(2-x), \text{ или}$$

$$x^2-4x+3<0, \text{ откуда}$$

$$1<x<3. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует

$$1 < x < 2. \tag{6}$$

2) Если $x>2$, то из (3) следует

$$\frac{1}{1+\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} > 2, \text{ или}$$

$$\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} > 2, \text{ или}$$

$$\sqrt{x-1} > x-2, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+5<0, \\ x>2, \end{cases}$$

откуда

$$2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}. \tag{7}$$

Таким образом, решением данного неравенства служат все числа из промежутков

$$1 < x < 2, \ 2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

625. Введем обозначение $x-2=z$, т. е. $x=z+2$. Тогда если $x\to 2$, то $z\to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi x}{4}} = \lim_{z\to 0} \frac{z(z+4)}{\cos\frac{\pi(z+2)}{4}} = \lim_{z\to 0} \frac{z(z+4)}{-\sin\frac{\pi z}{4}} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \lim_{z\to 0} \frac{\frac{\pi}{4}\cdot z(z+4)}{-\sin\frac{\pi z}{4}} = -\frac{4}{\pi} \lim_{z\to 0} \frac{\frac{\pi z}{4}}{\sin\frac{\pi z}{4}} \cdot \lim_{z\to 0}(z+4) =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\cdot 1\cdot 4 = -\frac{16}{\pi}.$$

626. Имеем

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{\sin(3\pi-3x)}{-\sin(2\pi-2x)} = -\frac{3}{2}\cdot \frac{\frac{\sin(3\pi-3x)}{3\pi-3x}}{\frac{\sin(2\pi-2x)}{2\pi-2x}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(3\pi-3x)}{3\pi-3x}}{\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(2\pi-2x)}{2\pi-2x}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=-\frac{3}{2}.$$

627. Пусть $OD\perp AC$ (рис. 141). Очевидно, что $\angle BOD=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $\angle OAD=\dfrac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}$, а следовательно,

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{OD}{r},\quad \sin\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{OD}{a}.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$\frac{a}{r}=\frac{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}}.$$

Составляем производную пропорцию

$$\frac{a-r}{a+r}=\frac{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}-\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}+\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Отв. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{a-r}{a+r}$.

628. Пусть a и b $(a<b)$ — катеты прямоугольного треугольника, а гипотенуза — c. Поскольку a, b, c составляют геометрическую прогрессию, то

$$b^2=ac. \tag{1}$$

Но так как

$$a=c\cdot\cos B,\quad b=c\cdot\sin B,$$

где B угол, противолежащий катету b, то равенство (1) можно переписать в виде

$$c^2\sin^2 B=c^2\cos B,$$

или

$$\cos^2 B+\cos B-1=0.$$

Положительное значение $\cos B$, удовлетворяющее этому равенству, есть $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Из равенства $\cos B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ следует, что $B=\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Второй острый угол равен $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

629. Опустим из одной из данных точек, скажем B, перпендикуляр BB_0 на данную плоскость и отложим на продолжении отрезка BB_0 за точку B_0 равный ему отрезок B_0B'. Так как для любой точки M данной плоскости имеем $MB=MB'$ (в силу перпендикулярности прямых MB_0 и BB' и равенства $BB_0=B_0B'$), то всегда $AM+MB=AM+MB'$. Но сумма $AM+MB'$ будет наименьшей, если точка M будет лежать на самом отрезке AB'. Отсюда следует, что искомой точкой будет точка пересечения прямой AB' с данной плоскостью.

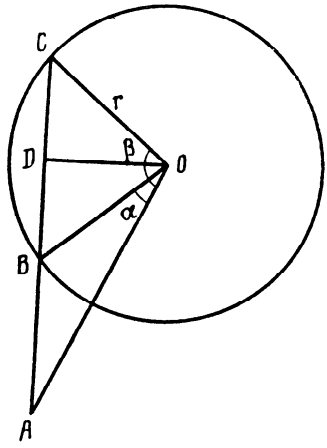

Рис. 141

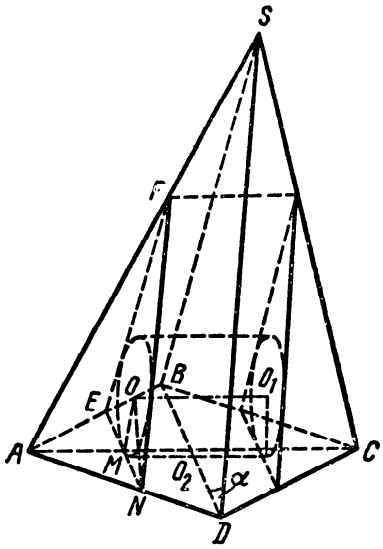

Рис. 142

630. Имеем OO_1 — ось цилиндра (рис. 142), плоскость EFN параллельна плоскости BSD, поэтому $\angle FNM=\angle SDO_2=\alpha$.

Пусть $OM=r$, тогда $OO_1=2r$.

Так как NO — биссектриса $\angle FNM$, то из треугольника MON находим

$$MN = r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Но

$$AM = MN = r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Далее,

$$O_2A = O_2M + AM,$$

т. е.

$$O_2A = r + r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\cdot\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (1)$$

В треугольнике SAO_2

$$O_2A = a \cdot \cos\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$r\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) = a \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$r = \frac{a \cdot \cos\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ. $r = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

631. Данное уравнение перепишем последовательно так

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{2} \cdot \sin 3x = \frac{4}{5},$$

$$2\sin 3x \cdot \cos x - 2\sin 3x \cdot \cos 3x = \frac{16}{5},$$

$$\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x = 3\frac{1}{5}.$$

Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$, что левая часть последнего уравнения не больше трех, а потому уравнение не имеет решений.

632. Поскольку $|x| < 1$, то $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$, есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Знаменатель прогрессии $q = x$. Таким образом, данное неравенство можно переписать в виде $\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1$, или

$$-1 < \frac{x}{1-x} < 1. \qquad (1)$$

Так как $|x| < 1$, то $1 - x > 0$, а следовательно, неравенство (1) равносильно неравенству $x - 1 < x < 1 - x$, откуда

$$x < \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Условие $|x| < 1$ равносильно

$$-1 < x < 1. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что решением данного неравенства служат все числа из промежутка $-1 < x < \frac{1}{2}$.

633. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin a\cdot\sin x}{x}=$$

$$=-2\sin a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2\cdot\sin a\cdot 1=-2\sin a.$$

634. Пусть a и b $(a<b)$ катеты прямоугольного треугольника, а c — его гипотенуза. Так как a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то

$$a+c=2b. \qquad (1)$$

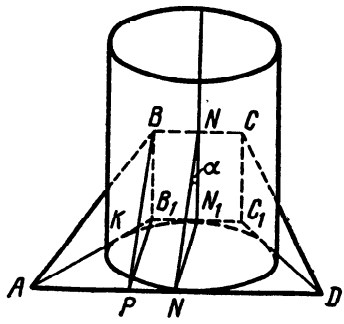

Рис. 143

Если B — угол, противолежащий катету b, то

$$a=c\cdot\cos B,\quad b=c\cdot\sin B \qquad (2)$$

Учитывая равенства (2), равенство (1) перепишется в виде

$$c\cdot\cos B+c=2c\cdot\sin B,$$

или

$$1+\cos B=2\sin B,$$

или

$$2\cos^2\frac{B}{2}=4\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}.$$

Поскольку $\cos\frac{B}{2}\neq 0$, то, поделив обе части последнего равенства на $\cos^2\frac{B}{2}$, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда $B=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, или $B=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Второй острый угол равен

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Впрочем, эту задачу можно решить и иначе. Пусть d — разность прогрессии, тогда $a=b-d$, $c=b+d$. Но так как $a^2+b^2=c^2$, то $(b-d)^2+b^2=(b+d)^2$. Отсюда $b^2=4bd$, или $d=\frac{b}{4}$, а потому $a=\frac{3b}{4}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{3}{4},\quad \operatorname{tg}B=\frac{b}{a}=\frac{4}{3},$$

т. е.

$$A = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\,,\quad B = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\,.$$

635. Рассмотрим равнобочную трапецию AB_1C_1D, получающуюся в результате проектирования данной трапеции $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную к оси цилиндра (рис. 143). Так как последняя описана около окружности, то

$$AB_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника APB_1 получаем

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 \sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{ab}}{h} \text{ и } \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{ab}}{h}\,.$$

636. Перепишем данное уравнение в таком виде

$$3(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x,$$

или

$$3\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\,.$$

После преобразований последнее уравнение принимает вид

$$\frac{3\sin x}{\sin 2x \cdot \sin 3x} = \frac{1}{\sin 2x \cdot \cos 2x}\,,$$

или

$$3\sin x \cdot \cos 2x = \sin 3x,$$

$$3\sin x \cdot \cos 2x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\sin x\,(3\cos 2x + 4\sin^2 x - 3) = 0.$$

$$\sin x\,[3(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin^2 x - 3] = 0,$$

$$2\sin^3 x = 0,$$

т. е. $\sin x = 0$, откуда $x = k\pi$.

Легко убедиться, что ни одно из значений $x = k\pi$ не являются решениями исходного уравнения. Поскольку в процессе решения мы не могли потерять корни, то уравнение не имеет решений, что и требовалось доказать.

637. Имеем

$$\sin^2 x - 2\sin x + 2(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1) = 0.$$

Решим это уравнение относительно $\sin x$:

$$\sin x = 1 \pm \sqrt{-2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1}\,.$$

Для того чтобы данное уравнение имело решение, необходимо выполнение неравенства $-2\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1\geqslant 0$, или

$$2\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+1\leqslant 0, \text{ т. е.}$$

$$(1-\operatorname{tg} x)^2+\operatorname{tg}^2 x\leqslant 0.$$

Но это неравенство не имеет решений (относительно $\operatorname{tg} x$), а потому данное уравнение не имеет решений.

В справедливости утверждения задачи можно убедиться и следующим образом.

Данное уравнение можно переписать в виде

$$(\sin x-1)^2+(\operatorname{tg} x-1)^2+\operatorname{tg}^2 x=0.$$

Теперь ясно, что для того, чтобы это уравнение имело решение, необходимо, чтобы уравнения $\sin x=1$, $\operatorname{tg} x=1$, $\operatorname{tg} x=0$ имели общие решения. Но таких решений нет. Следовательно, и данное уравнение не имеет решений.

638. Очевидно, что должно быть

$$x\geqslant 0,$$

так как функция $\sqrt{x}$ определена только при $x\geqslant 0$. Разделив обе части решаемого неравенства на выражение $4^{\sqrt{x}}$, которое при любом x положительно, получим неравенство

$$4^{x-\sqrt{x}}\leqslant 3\cdot 2^{x-\sqrt{x}}+4, \tag{1}$$

равносильное данному.

Введем обозначение $z=2^{x-\sqrt{x}}$, $(z>0)$, тогда неравенство (1) перепишется в виде $z^2-3z-4\leqslant 0$, или $(z+1)\cdot(z-4)\leqslant 0$. Так как $z+1>0$, то $z-4\leqslant 0$, откуда

$$z\leqslant 4.$$

Следовательно, всеми решениями данного неравенства являются все x, удовлетворяющие неравенствам

$$0<2^{x-\sqrt{x}}\leqslant 4.$$

Левое неравенство выполняется для всех $x\geqslant 0$.

Решим неравенство $2^{x-\sqrt{x}}\leqslant 2^2$.

Так как показательная функция a^x при $a>1$ — возрастающая, то из последнего равенства следует, что

$$x-\sqrt{x}\leqslant 2,$$

или

$$(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-2)\leqslant 0.$$

Но так как $\sqrt{x}+1>0$ при любом $x\geqslant 0$, то остается решить неравенство $\sqrt{x}-2\leqslant 0$, или $\sqrt{x}\leqslant 2$. Отсюда

$$x\leqslant 4.$$

Таким образом, всеми решениями исходного неравенства являются все x из промежутка $0 \leqslant x \leqslant 4$.

639. Областью определения левой части решаемого неравенства являются все решения системы неравенств

$$x > 0,\ x \neq 1,\ \log_2(4^x - 6) > 0,\ \text{т. е.}$$

$$x > 0,\ x \neq 1,\ 4^x - 6 > 1,\ \text{т. е.}$$

$$x > 0,\ x \neq 1,\ x > \log_4 7.$$

Все решения этой системы выражаются формулой $x > \log_4 7$. Но так как $x > \log_4 7$ и $0 < x < 1$ несовместны, то областью определения левой части данного неравенства служат все числа из промежутка

$$x > \log_4 7. \tag{1}$$

Теперь перепишем данное неравенство в виде

$$\log_2(4^x - 6) < x,$$

так как $x > \log_4 7 > 1$, или

$$4^x - 6 < 2^x,$$

$$2^{2x} - 2^x - 6 < 0,$$

$$(2^x + 2)\cdot(2^x - 3) < 0.$$

Отсюда следует, что

$$x < \log_2 3. \tag{2}$$

Наконец, из неравенств (1) и (2) заключаем, что решениями данного неравенства служат все те и только те числа, которые принадлежат промежутку

$$\log_4 7 < x < \log_2 3,\ \text{т. е.}$$

$$\log_4 7 < x < \log_4 9.$$

640. Пусть $x - \frac{\pi}{3} = z$, тогда $x = z + \frac{\pi}{3}$. Следовательно, если $x \to \frac{\pi}{3}$, то $z \to 0$. Имеем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{1 - 2\cos\left(z + \frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{1 - \cos z + \sqrt{3}\cdot\sin z} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2} + \sqrt{3}\cdot\cos\frac{z}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

641. Пусть $\sin x = z$, тогда если $x \to \frac{\pi}{6}$, то $z \to \frac{1}{2}$.

Имеем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{(2z-1)\cdot(z+1)}{(2z-1)\cdot(z-1)} =$$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{z+1}{z-1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3.$$

642. Данную зависимость перепишем в виде

$$\frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} - \cos(A-B)\cdot\cos C - \cos^2 C = \frac{1}{4}.$$

или

$$\cos 2A + \cos 2B + 2\cos(A-B)\cdot\cos C + 2\cos^2 C = \frac{3}{2},$$

или

$$\cos(A+B)\cdot\cos(A-B) + \cos(A-B)\cdot\cos C + \cos^2 C = \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Но поскольку $C = \pi - (A+B)$, то $\cos C = -\cos(A+B)$, а потому равенство (1) принимает вид

$$\cos(A+B)\cdot\cos(A-B) - \cos(A+B)\cdot\cos(A-B) + \cos^2 C = \frac{3}{4}, \text{ т. е,}$$

$$\cos^2 C = \frac{3}{4}, \text{ а поэтому } \sin^2 C = \frac{1}{4}.$$

Так как $0 < C = \pi$, то из равенства $\sin C = + \frac{1}{2}$ следует, что $C = 30°$ или $C = 150°$.

643. Пусть $\angle B > \angle C$ и $\angle B < \frac{\pi}{2}$ (рис. 144, *а*) и пусть точка D — проекция вершины A на сторону BC, $\angle AMB = x$. Имеем

$$2(BD + DM) = BC = BD + DC,$$

откуда $DM = \frac{1}{2}(DC - DM)$. Но

$$DM = AD\cdot\operatorname{ctg} x, \quad DC = AD\cdot\operatorname{ctg} C, \quad DB = AD\cdot\operatorname{ctg} B.$$

Следовательно, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B)$.

Если же $\angle B > \frac{\pi}{2}$, то (рис. 144, *б*)

$$2(DM - DB) = BC = DC - DB.$$

Отсюда

$$DM = \frac{1}{2}(DC + DB).$$

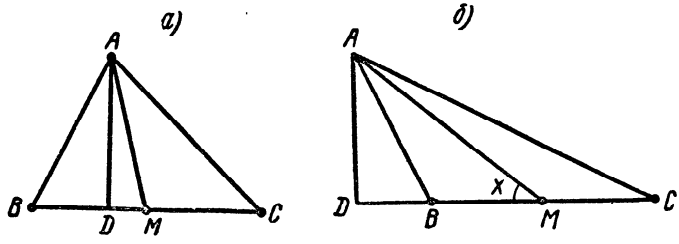

Рис. 144

Но

$$DM = AD \cdot \operatorname{ctg} x, \quad DC = AD \cdot \operatorname{ctg} C,$$
$$DB = AD \cdot \operatorname{ctg}(\pi - B) = -AD \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B).$$

Легко убедиться, что если $\angle B = \frac{\pi}{2}$, то также имеем

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B).$$

Также, если $\angle C > \angle B$, то получается формула

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C).$$

Наконец, очевидно, что эта формула верна и тогда, когда $\angle B = \angle C$. Итак, во всех случаях

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}\left|\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C\right|.$$

644. На рис. 145 показаны два шара, касающиеся друг друга внешним образом и касающиеся плоскости соответственно в точках M и N. Пусть радиусы этих шаров r_1 и r_2. Из рисунка усматриваем, что

$$MN = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}. \qquad (1)$$

Известно, что $AB=c$. Пусть $BC=a$, $CA=b$ и пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы шаров, касающихся плоскости треугольника ABC соответственно в точках A, B, C. В силу (1) имеем

$$a=2\sqrt{r_2r_3}\ ,\quad b=2\sqrt{r_1r_3}\ ,\quad c=2\sqrt{r_1r_2}\ .$$

Перемножая почленно эти уравнения, получим $abc=8r_1r_2r_3$. Отсюда $r_1r_2r_3=\dfrac{abc}{8}$.

Но поскольку $r_2r_3=\dfrac{a^2}{4}$, $r_1r_3=\dfrac{b^2}{4}$, $r_1r_2=\dfrac{c^2}{4}$, то

$$r_1=\frac{b\cdot c}{2a}\ ,\quad r_2=\frac{a\cdot c}{2b}\ ,\quad r_3=\frac{ab}{2c}\ .$$

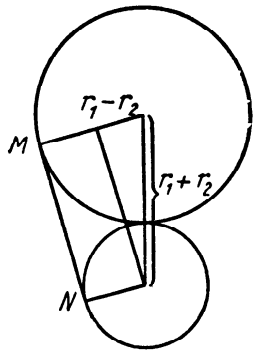

Рис. 145

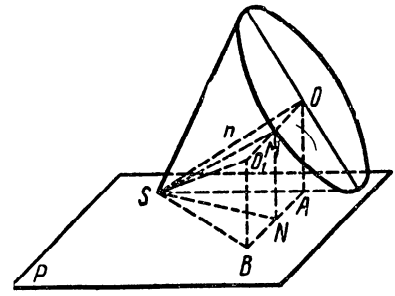

Рис. 146

Далее, из треугольника ABC в силу теоремы синусов имеем

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin(A+B)}\ .$$

Отсюда

$$a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin(A+B)}\ ,\quad b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin(A+B)}\ .$$

Таким образом, получаем

$$r_1=\frac{c\cdot\sin B}{2\sin A}\ ,\quad r_2=\frac{c\cdot\sin A}{2\sin B}\ ,\quad r_3=\frac{c\cdot\sin A\cdot\sin B}{2\sin^2(A+B)}\ .$$

645. Пусть O и O_1 — центры оснований двух соседних конусов, лежащих на плоскости P, M — середина отрезка OO_1, SA и SB — проекция высот SO и SO_1 этих конусов на плоскости P (рис. 146).

Пусть $SO=SO_1=h$, x — искомый угол. В треугольнике AOS катет $SA=h\cdot\cos\dfrac{x}{2}$. В треугольнике SAN катет

$$AN = SA \cdot \sin\frac{\pi}{n} = h \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{n}.$$

Из треугольника SMO имеем

$$SM = h \cdot \cos\frac{x}{2},$$

$$OM = AN = h \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{n}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{OM}{SM} = \frac{h \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{n}}{h \cdot \cos\frac{x}{2}},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi}{n}.$$

Отв. $2\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

646. Так как $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{2\operatorname{tg} 5x}{1-\operatorname{tg}^2 5x} = \frac{2}{(1-\operatorname{tg}^2 5x)\cos 5x}, \text{ или } \frac{\sin 5x}{(1-\operatorname{tg}^2 5x)\cdot\cos 5x} = \frac{1}{(1-\operatorname{tg}^2 5x)\cdot\cos 5x}.$$

Если данное уравнение имеет решения, то они являются решениями уравнения $\sin 5x = 1$. Но при этом $\cos 5x = 0$, а поскольку при $\cos 5x = 0$ исходное уравнение теряет смысл, то данное уравнение не имеет решений

647. Ясно, что все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, & (1) \\ \sqrt{x+3} - x - 1 > 0, & (2) \\ \sqrt{x+3} - x - 1 \leqslant 1 & (3) \end{cases}$$

являются всеми решениями данного неравенства. Из неравенства (1) следует

$$x \geqslant -3. \quad (4)$$

Неравенство (2) выполняется, если $-3 \leqslant x < -1$, поскольку при этих значениях x радикал $\sqrt{x+3} \geqslant 0$, а $x+1<0$. Если же $x \geqslant -1$, то неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$x + 3 > x^2 + 2x + 1,$$

или

$$x^2 + x - 2 < 0,$$

откуда

$$-2 < x < 1.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае решениями неравенства (2) служат все числа из промежутка

$$-1 \leqslant x < 1.$$

Итак, всеми решениями неравенства (2) служат все числа из промежутка

$$-3 \leqslant x < 1. \tag{5}$$

Перепишем неравенство (3) в таком виде

$$\sqrt{x+3} \leqslant x + 2.$$

Очевидно, что если $x \leqslant -2$, это неравенство не имеет решений. Если же $x > -2$, то оно эквивалентно неравенству

$$x + 3 \leqslant x^2 + 4x + 4,$$

или

$$x^2 + 3x + 1 \geqslant 0,$$

откуда получаем, учитывая, что $x > -2$,

$$x \geqslant \frac{\sqrt{5} - 3}{2}. \tag{6}$$

Из равенств (4), (5) и (6) заключаем, что всеми решениями данного неравенства являются все числа из промежутка $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leqslant x < 1$.

648. Пусть $\sqrt{23+x} = z^3$, тогда $x = z^3 - 23$. Если $x \to 4$, то $z \to 3$, так как $z = \sqrt[3]{23+x}$. Имеем

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt[3]{23+x}-3} = \lim_{z\to 3} \frac{z^3-27}{z-3} = \lim_{z\to 3} (z^2 + 3z + 9) = 27.$$

649. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{tg} A\,(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)}{\operatorname{tg} B\,(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} A \cdot \sin(B+C) \cdot \cos A \cdot \cos C}{\operatorname{tg} B \cdot \sin(A+C) \cdot \cos B \cdot \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin(\pi - A)}{\sin(\pi - B)} =$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{a^2}{b^2}$$

на основании теоремы синусов.

650. Пусть AB — штатив (рис. 147). Проводим прямую BD через точку B и вершину конуса C. Через BD проводим плоскости P и Q, касательные к данному конусу. В плоскости ABD проводим CL параллельно DA. Приступим к вычислению площади тени конуса — S_{DMKN}.

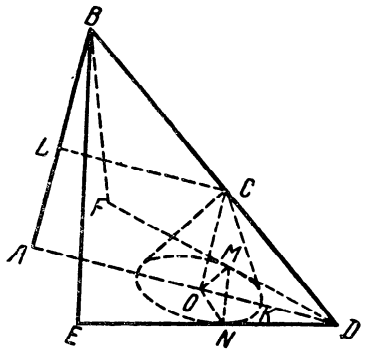

Рис. 147

В треугольнике BCL

$$CL = BL = 2, \quad \angle BCL = 45°.$$

Так как в треугольнике OCD $\angle D = 45°$, то $OD = OC = 2$. Так как в треугольнике ODN $\angle N = 90°$ и $OD = 2NO$, то $\angle ODN = 30°$. Отсюда

$$\angle MON = 120°, \quad MN = ON \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \ (м),$$

$$S_{DMKN} = S_{OMDN} - S_{\text{сектора } OMKN} = \frac{OD \cdot MN}{2} - \frac{\pi \cdot ON^2}{3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi \cdot 1}{3} = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \ (м^2).$$

651. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^2 x \cdot (2 \sin x \cdot \cos x)^{10} = \frac{2^{10}}{1000}, \text{ или}$$

$$\cos^2 x \cdot \sin^{10} 2x = 1{,}024.$$

Так как $\cos^2 x \leqslant 1$, $\sin^{10} 2x \leqslant 1$, то последнее уравнение, а вместе с ним и предложенное не имеют решения.

652. Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} 2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 + 2\cos^2 \dfrac{y}{2} - 1 = 1, \\ \cos \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos^2 \dfrac{y}{2} = \dfrac{3}{2}, \\ \cos \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}\right)^2-2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}=\frac{3}{2}, \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2-2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}=\frac{3}{2}, \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \end{cases}$$

или после упрощений

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$$

Таким образом, $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{y}{2}$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\cdot z-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$$

Решая это уравнение, получим

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_2=-1.$$

Следовательно, имеем две системы

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\frac{y}{2}=-1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos\frac{x}{2}=-1, \\ \cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$x_1=4k\pi\pm\frac{\pi}{2},\quad y_1=2(2n+1)\pi,$$

а из второй системы находим

$$x_2 = 2(2m+1)\pi,\quad y_2 = 4l\pi \pm \frac{\pi}{2},$$

где m, n, k, l — любые целые числа.

653. Поскольку только положительные числа имеют логарифмы, то должны быть выполнены неравенства $x+1>0$, $2-x>0$. Отсюда

$$-1 < x < 2. \qquad (1)$$

Перепишем данное неравенство последовательно так

$$\log_2(x+1)\cdot\log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_2(2-x),$$

$$\log_2 \frac{1}{x+1} > \log_2(2-x).$$

Поскольку логарифмическая функция при основании, большем 1, — возрастающая, то имеем $\frac{1}{x+1} > 2-x$. Так как $x+1>0$, то последнее неравенство эквивалентно такому $(2-x)(x+1)<1$, или $x^2-x-1>0$. Так как корнями левой части этого неравенства служат числа $\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$, то неравенство $x^2-x-1>0$, а вместе с ним и решаемое будет выполнено тогда и только тогда, когда либо $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, либо $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Но в силу того, что $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $2>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то решениями данного неравенства служат те и только те числа, которые принадлежат промежуткам

$$-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2.$$

Наконец, заметим, что полученные решения не противоречат неравенству (1).

654. Должно быть $x>0$, $x\neq 1$. Так как $x^{\frac{1}{\lg x}} = (10^{\lg x})^{\frac{1}{\lg x}} = 10$, то данное неравенство можно переписать в таком виде

$$10\lg x < 1, \text{ где } x > 0,\ x \neq 1.$$

Отсюда $\lg x<0{,}1$; поэтому $0<x<1$; $1<x<\sqrt[10]{10}$.

Отв. $0<x<1$; $1<x<\sqrt[10]{10}$.

655. Пусть $\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)} = f(x)$. Имеем

$$f(x)=\frac{2\cos a\cdot\sin x\cdot\cos(a+x)\cdot\cos(a-x)}{\sin 2x}=$$

$$=\frac{\cos a\cdot\cos(a+x)\cdot\cos(a-x)}{\cos x}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos a\cdot\cos(a+x)\cdot\cos(a-x)}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos a\cdot\cos a\cdot\cos a}{\cos 0}=\cos^3 a.$$

656. Пусть $(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=f(x)$. Имеем

$$f(x)=(1-x)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}}=$

$$=\lim_{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}}=1,\ \text{то}\ \lim_{x\to 1}f(x)=1\cdot\frac{\frac{2}{\pi}}{1}=\frac{2}{\pi}.$$

657. Имеем

$$\operatorname{tg}3\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha}-\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cdot(\cos 2\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha}=-\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha}.$$

Таким образом, данное равенство можно переписать в таком виде

$$\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha}=0.$$

Отсюда либо $\sin 2\alpha=0$, либо $\cos 4\alpha=0$. Из равенства $\sin 2\alpha=0$ следует, что $4\alpha=2\pi$, что невозможно, так как 4α — угол треуголь-

ника, а из равенства $\cos 4\alpha = 0$ получаем $4\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. треугольник прямоугольный.

658. Так как $\cos 5° > \cos 35° > \cos 50°$, то наибольшая сторона рассматриваемого треугольника равна $\cos 5°$. Следовательно, надо сравнить $\cos^2 5°$ с суммой $\cos^2 35° + \cos^2 50°$. Имеем

$$\cos^2 5° - (\cos^2 35° + \cos^2 50°) = (\cos^2 5° - \cos^2 35°) - \cos^2 50° =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 10° - 1 - \cos 70°) - \cos^2 50° = \sin 30° \cdot \sin 40° -$$

$$- \sin^2 40° = \sin 40° \cdot (\sin 30° - \sin 40°) < 0,$$

так как $\sin 30° < \sin 40°$. Таким образом, $\cos^2 5° < \cos^2 35° + \cos^2 50°$, а потому рассматриваемый треугольник является остроугольным.

При доказательстве мы считали, что треугольник со сторонами $\cos 5°$, $\cos 35°$, $\cos 50°$ существует. Но последнее надо доказать. Доказательство проведем так: как уже доказано,

$$\cos^2 5° < \cos^2 35° + \cos^2 50°,$$

а потому и подавно имеет место неравенство

$$\cos^2 5° < \cos^2 35° + \cos^2 50° + 2\cos 35° \cdot \cos 50° = (\cos 35° + \cos 50)^2,$$

или

$$\cos 5° < \cos 35° + \cos 50°,$$

что и доказывает существование треугольника.

659. Первый случай. Треугольник ASB — осевое сечение конуса (рис. 148). Отрезок MN — пересечение осевого сечения конуса с сечением конуса плоскостью, указанной в условии задачи, MN перпендикулярен к SB.

Пусть $OD = r$, тогда $SN = kr$. Очевидно, что $COFN$ — квадрат. Обозначим $\angle SAD = \angle SOF = 2\alpha$, тогда $SD = AD \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$. Имеем

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi \cdot AD^2 \cdot SD = \frac{1}{3} \pi \cdot AD^3 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha. \qquad (1)$$

Из треугольника AOD находим, что $AD = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ (так как AO — биссектриса угла SAD), следовательно, (1) примет вид

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Далее, так как $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3$, то

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{1}{3} \pi r^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}{\frac{4}{3} \pi r^3},$$

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{4 \operatorname{tg}^3 \alpha}. \qquad (2)$$

Из треугольника SOF имеем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{SF}{OF} = \frac{SN + NF}{OF} = \frac{kr + r}{r} = k + 1,$$

или

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = k + 1,$$

$$(k + 1) \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - (k + 1) = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + (k+1)^2}}{k+1} = \frac{\sqrt{k^2 + 2k + 2} - 1}{k+1}. \qquad (3)$$

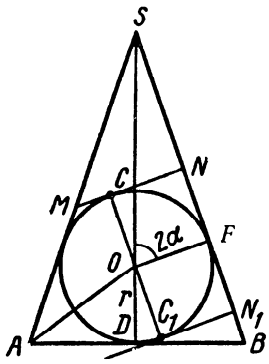

Рис. 148

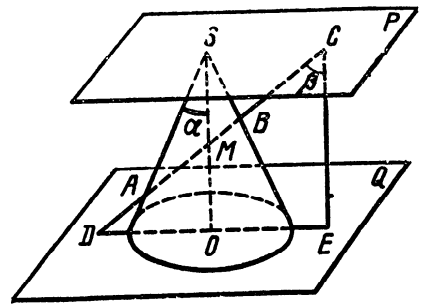

Рис. 149

Таким образом, из (2) и (3) получаем

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{(k+1)^4}{4\left(\sqrt{k^2 + 2k + 2} - 1\right)^3}.$$

Уничтожив иррациональность в знаменателе, получаем

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\left(1 + \sqrt{k^2 + 2k + 2}\right)^3}{4(k+1)^2}.$$

Второй случай. Если плоскость, касательная к шару, пересекает образующую (перпендикулярную к этой плоскости в точке N_1), то $SN_1 = kr$, а поэтому

$$SF = (k - 1)r \text{ и } \operatorname{tg} 2\alpha = k - 1.$$

Заменив в преобразованиях первого случая $(k+1)$ на $(k-1)$, получим

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{(k-1)^4}{4\left(\sqrt{k^2 - 2k + 2} - 1\right)^3},$$

следовательно,

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\left(1+\sqrt{k^2-2k+2}\right)^3}{4(k-1)^2}.$$

660. Из рис. 149 усматриваем, что в треугольнике CDE

$$\angle E = 90^\circ,\ \angle C = \beta,\ CD = d,$$

следовательно,

$$CE = d\cdot\cos\beta.$$

Таким образом,

$$SM = \frac{1}{2}CE = \frac{d}{2}\cdot\cos\beta.$$

В трсугольнике ASM

$$\frac{AS}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{SM}{\sin(\beta-\alpha)},$$

следовательно,

$$AS = \frac{SM\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta}{2\cdot\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\cdot\sin 2\beta}{4\cdot\sin(\beta-\alpha)}.$$

В треугольнике ASB

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{AS}{\sin(\beta+\alpha)}.$$

Теперь легко определяем AB.

Отв. $\dfrac{d}{4}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$.

661. Данную систему можно переписать в таком виде

$$\begin{cases} \sin(x-y) = \dfrac{3}{2}\sin(x+y) + \dfrac{3}{2}\sin(x-y) - 1, \\ \sin(x+y) = \sin(x-y) - \sin(x+y). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\sin(x+y) = \frac{2}{5},\ \sin(x-y) = \frac{4}{5}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x+y = k\pi + (-1)^k\cdot\arcsin\dfrac{2}{5}, \\ x-y = n\pi + (-1)^n\cdot\arcsin\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти два уравнения, получим

$$x=\frac{k+n}{2}\cdot\pi+\frac{1}{2}\cdot(-1)^k\cdot\arcsin\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot(-1)^n\cdot\arcsin\frac{4}{5},$$

$$y=\frac{k-n}{2}\cdot\pi+\frac{1}{2}\cdot(-1)^k\cdot\arcsin\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n\cdot\arcsin\frac{4}{5},$$

где k и n — любые целые числа.

662. Из условия следует, что

$$0<\log_2\frac{3-2x}{1-x}<1 \text{ и } x\neq 1, \text{ или}$$

$$1<\frac{2x-3}{x-1}<2, \text{ или}$$

$$\left(1-\frac{2x-3}{x-1}\right)\cdot\left(2-\frac{2x-3}{x-1}\right)<0, \text{ или}$$

$$\frac{(x-1-2x+3)\cdot(2x-2-2x+3)}{(x-1)^2}<0, \text{ или}$$

$$(2-x)\cdot 1<0, \text{ т. е.}$$

$$x>2.$$

Отв. Все числа промежутка $(2, +\infty)$.

663. Пусть $\sin\frac{x-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}=f(x)$ Имеем

$$f(x)=\sin\frac{x-a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}}\cdot\left(-\frac{\pi}{a}\right)}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)=\cos 0=1,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\lim_{\frac{x-a}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1 \text{ и } \lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}}=$$

$$= \lim_{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}} =$$

$= 1$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$

$$= \frac{1\cdot 1}{1\cdot\left(-\frac{\pi}{a}\right)} = -\frac{a}{\pi}.$$

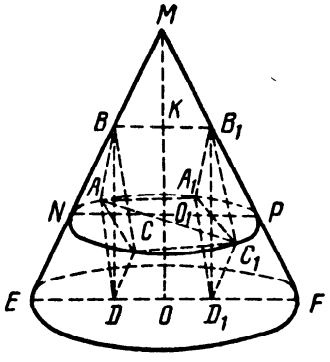

Рис. 150

664. Для определенности пусть C — наименьший угол треугольника. Тогда число $\cos^2\frac{C}{2}$ больше каждого из чисел $\cos^2\frac{A}{2}$ и $\cos^2\frac{B}{2}$. Таким образом, надо доказать неравенство

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}>0. \qquad (1)$$

Имеем

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1+\cos A+\cos B-\cos C}{2}=$$

$$=\sin^2\frac{C}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}\cdot\left(\cos\frac{A+B}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{A-B}{2}\right)=2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}>0,$$

так как $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ — острые углы. Итак, мы доказали неравенство (1), а следовательно, и утверждение задачи. Ясно, что задача верна также для равнобедренного и равностороннего треугольников.

665. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан в конус (рис. 150). Пусть ребро куба $BB_1=a$, тогда диагональ грани $BD=a\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника AA_1C_1 имеем

$$AC_1=\sqrt{a^2+2a^2}=a\sqrt{3}=NP,$$

(AC_1 и NP — диаметры круга, в который вписан прямоугольник AA_1C_1C). Пусть $MO=H$ — высота конуса, $OE=R$ — радиус основания конуса. Так как NP — средняя линия трапеции EBB_1F, то

$$2R+a=2a\sqrt{3}\quad 2R=a\left(2\sqrt{3}-1\right),\quad R=\frac{a}{2}\,2\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Из подобия треугольников EMF и BMB_1 следует, что

$$\frac{BB_1}{EF}=\frac{MK}{MO} \text{ или } \frac{a}{a\left(2\sqrt{3}-1\right)}=\frac{H-a\sqrt{2}}{H}$$

$$\text{или } \frac{H}{a\sqrt{2}}=\frac{a\left(2\sqrt{3}-1\right)}{2a\left(\sqrt{3}-1\right)}.$$

Отсюда $H=\frac{a\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}$, Отношение объема конуса к объему куба

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{куба}}}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\pi\left(2\sqrt{3}-1\right)^3}{12\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\pi\left(24\sqrt{3}-36+6\sqrt{3}-1\right)}{12\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{48}\cdot\left(30\sqrt{3}-37\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{48}\left(30\sqrt{3}-37\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sqrt{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{48}\cdot\left(53-7\sqrt{3}\right).$$

Отв. $\frac{\pi\sqrt{2}}{48}\cdot\left(53-7\sqrt{3}\right)$.

666. Должно быть $x-1>0$, $2x-4>0$, т. е. $x>2$. Перепишем данное неравенство в виде $\frac{(x-1)^2}{2x-4}>2$. Но так как $2x-4>0$, то $(x-1)^2>2\cdot(2x-4)$, или $x^2-6x+9>0$, или $(x-3)^2>0$, которое имеет место при любом $x\neq 3$.

Таким образом, решениями данного неравенства служат все числа большие 2, исключая 3.

Отв. $2<x<3$; $x>3$.

667. Так как $2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, то второе уравнение системы можно переписать в виде $\sin(2x-y)+\sin y=\sin y$, или $\sin(2x-y)=0$. Отсюда

$$y=k\pi+2x. \tag{1}$$

Подставляя найденное значение y в первое уравнение системы, получаем $4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}4x$, или $\operatorname{tg}3x=3\cdot(\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}3x)$, или $\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\frac{3\sin x}{\cos 3x\cdot\cos 4x}$, или $\cos 4x\cdot\sin 3x=3\sin x$. Но так как $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, то имеем

$$\cos 4x\cdot(3\sin x-4\sin^3 x)-3\sin x=0,$$

или

$$\sin x[\cos 4x\cdot(3-4\sin^2 x)-3]=0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два: $\sin x=0$ и

$$\cos 4x\cdot(3-4\sin^2 x)-3=0.$$

Из уравнения $\sin x=0$ находим $x=n\pi$. Подставляя это значение x в равенство (1), получаем $y=m\pi$. Второе уравнение $\cos 4x\cdot(3-4\sin^2 x)-3=0$ не дает новых решений. В самом деле, так как $3-4\sin^2 x\leqslant 3$, а $\cos 4x\leqslant 1$, то возможно лишь $\sin x=0$ и $\cos 4x=1$. Из уравнения $\sin x=0$ следует, что $x=k\pi$. Тогда $\cos 4x=\cos 4k\pi=1$. Следовательно, данное уравнение не имеет других решений, кроме $x=n\pi$, $y=m\pi$.

Отв. $x=n\pi$, $y=m\pi$, где m и n — любые целые числа.

668. Область допустимых значений x определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2-1\neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решая систему (1), получаем $0<x<1$, $x>1$.

1) Если $0<x<1$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$|x^2-1|<1. \tag{2}$$

Так как при $0<x<1$ выражение $x^2-1<0$, то неравенство (2) равносильно неравенству $1-x^2<1$, или $x^2>0$, что имеет место при любом x из промежутка $0<x<1$. Таким образом, все числа из промежутка $0<x<1$ служат решениями данного неравенства.

2) Если $x>1$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$|x^2-1|>1. \tag{3}$$

Поскольку при $x>1$ выражение $x^2-1>0$, то неравенство (3) равносильно неравенству $x^2-1>1$, откуда $x>\sqrt{2}$, или $x<-\sqrt{2}$.

Мы рассматриваем случай, когда $x>1$, поэтому все числа из промежутка $x>\sqrt{2}$ являются решениями данного неравенства.

Отв. Все числа из промежутков $0<x<1$ и $x>\sqrt{2}$.

669. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{5-4(1-\cos^2 x+\cos x)}{\cos x}\leqslant 0,$$

или

$$\frac{4\cos^2 x-4\cos x+1}{\cos x}\leqslant 0,$$

$$\frac{(2\cos x-1)^2}{\cos x}\leqslant 0.$$

Если $2\cos x-1=0$, т. е. если $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, то имеет место равенство.

Если же $(2\cos x-1)^2>0$, то должно быть $\cos x<0$, откуда

$$\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi.$$

Отв. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, где n и k — любые целые числа.

670. Так как $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, то

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

671. Имеем

$$\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}-\cos x}=$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\cos 0}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{0{,}5}=2,$$

что и требовалось доказать.

672. По теореме синусов имеем $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, или

$$\frac{a\cdot\sin A}{\sin^2 A}=\frac{b\cdot\sin B}{\sin^2 B}=\frac{c\cdot\sin C}{\sin^2 C},$$

$$\text{или}\quad\frac{\sqrt{a\cdot\sin A}}{\sin A}=\frac{\sqrt{b\cdot\sin B}}{\sin B}=\frac{\sqrt{c\cdot\sin C}}{\sin C}.$$

Так как в ряде равных отношений сумма всех предыдущих членов относится к сумме всех последующих, как любой из предыдущих к своему последующему, то

$$\frac{\sqrt{a\sin A}+\sqrt{b\cdot\sin B}+\sqrt{c\cdot\sin C}}{\sin A+\sin B+\sin C}=\sqrt{\frac{a}{\sin A}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}}=\sqrt{\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C}}. \qquad (1)$$

Из первого и последнего отношений равенства (1) следует, что

$$\sqrt{a\cdot\sin A}+\sqrt{b\cdot\sin B}+\sqrt{c\cdot\sin C}=\sqrt{2p\cdot(\sin A+\sin B+\sin C)}.$$

673. В силу теоремы синусов имеем

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},\quad \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A},\quad \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

Следовательно, левая часть доказываемого равенства перепишется так

$$\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)\cdot\cos A+\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)\cdot\cos B+$$

$$+\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right)\cdot\cos C=\frac{1}{\sin A}\cdot(\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B)+$$

$$+\frac{1}{\sin B}(\sin C\cdot\cos A+\sin A\cdot\cos C)+$$

$$+\frac{1}{\sin C}\cdot(\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)=$$

$$=\frac{\sin(B+C)}{\sin A}+\frac{\sin(C+A)}{\sin B}+\frac{\sin(A+B)}{\sin C}=3,$$

так как $\sin(B+C)=\sin A$, $\sin(C+A)=\sin B$; $\sin(A+B)=\sin C$.

674. Введем обозначения: H — высота пирамиды, Q — площадь ее основания, h — высота призмы, q — площадь ее основания. Известно, что в пирамиде площади параллельных сечений относятся как квадраты их расстояний от вершины. Следовательно, $\frac{q}{Q}=\frac{(H-h)^2}{H^2}$, откуда $q=\frac{Q}{H^2}\cdot(H-h)^2$. Объем призмы $V=q\cdot h=\frac{Qh}{H^2}\cdot(H-h)^2$. Поскольку Q и H постоянны, то V зависит от произведения $y=h(H-h)^2=\frac{2h(H-h)(H-h)}{2}$. Так как сумма $2h+(H-h)+(H-h)=2H$ — постоянная величина, то y достигает максимума при условии $2h=H-h$, откуда $h=\frac{H}{3}$. Итак, $V_{max}=\frac{QH}{3H^2}\left(H-\frac{H}{3}\right)^2=\frac{4QH}{27}$.

Отв. Высота призмы в 3 раза меньше высоты пирамиды.

675. Пусть образующая цилиндрической части котла l, а общий радиус основания цилиндра и полусферы R. Тогда, по условию задачи, объем котла

$$V = \pi R^2 l + \frac{4}{3}\pi R^3, \tag{1}$$

откуда

$$l = \frac{V - \frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2}. \tag{2}$$

Поверхность котла

$$S = 2\pi R l + 4\pi R^2. \tag{3}$$

Подставляя из (2) значение l в (3), получим

$$S = 2\cdot\left(\frac{V}{R} + \frac{2\pi R^2}{3}\right), \text{ или } S = 2\left(\frac{V}{2R} + \frac{V}{2R} + \frac{2\pi R^2}{3}\right).$$

Но так как произведение $\frac{V}{2R}\cdot\frac{V}{2R}\cdot\frac{2\pi R^2}{3} = \frac{\pi V^2}{3}$ есть постоянная величина, то поверхность S достигает минимума при условии $\frac{V}{2R} = \frac{2\pi R^2}{3}$, откуда

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}. \tag{4}$$

Из (1) и (4) заключаем, что поверхность котла будет наименьшей при $\pi R^2 l = 0$, т. е. при $l = 0$. Таким образом, минимальная поверхность котла достигается, когда он состоит только из двух полусфер. Итак,

$$S_{\min} = 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}.$$

676 Второе уравнение системы перепишем в виде

$$\cos 2x - \cos 2y + 4\cos 2y + 8\sin y = 8 + 4\sin x\cdot\cos y,$$

или

$$1 - 2\sin^2 x - 2\cos^2 y + 1 + 4 - 8\sin^2 y + 8\sin y - \\ - 8 - 4\sin x\cdot\cos y = 0,$$

или

$$2(\sin x + \cos y)^2 + 2(2\sin y - 1)^2 = 0.$$

Так как сумма неотрицательных величин равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю, то имеем систему

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ 2\sin y - 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $\sin y = \frac{1}{2}$, или $\cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$y = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi. \qquad (1)$$

Подставляя найденное значение y в первое уравнение исходной системы, получаем

$$\cos x \cdot \cos\left(\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos 2x + 2\cos x = 1,$$

или

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + 2\cos x = 1,$$

или

$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0,$$

откуда $\cos x = \frac{1}{2}$ и, значит,

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi. \qquad (2)$$

В силу уравнения $\sin x + \cos y = 0$ в формулах (1) и (2) надо брать одновременно только верхние знаки или только нижние знаки.

Отв. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, с указанным порядком знаков.

677. Перепишем данное неравенство последовательно так:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} - 2 > 0, \quad \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x + 1} < 0,$$

$$(\operatorname{tg} x + 1)\cdot(\operatorname{tg} x + 2) < 0, \text{ откуда}$$

$$-2 < \operatorname{tg} x < -1.$$

Следовательно, решениями данного неравенства служат те и только те числа, которые принадлежат промежуткам

$$k\pi - \operatorname{arctg} 2 < x < k\pi - \frac{\pi}{4},$$

где k принимает любые целые значения.

678. Так как $x \to 0$, то будем рассматривать x в интервале $(-\pi, \pi)$. Имеем

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \left|\cos\frac{x}{2}\right|}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\cdot\sin^2\frac{x}{4}}{4\cdot\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sin^2\frac{x}{4}}{16\sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\cos^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{1}{1\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

679. Если a, b, c — стороны треугольника, а A, B, C — противолежащие им углы, то имеем

$$a = 2R\cdot\sin A, \quad b = 2R\cdot\sin B, \quad c = 2R\cdot\sin C = 2R\cdot\sin(A+B),$$

где R — радиус описанной окружности.

$$y = a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2\cdot[\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A+B)] =$$

$$= 4R^2\left[\frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2(A+B)\right] =$$

$$= 4R^2[2 - \cos(A-B)\cdot\cos(A+B) - \cos^2(A+B)].$$

Очевидно, что y достигает максимума при тех же назначениях A и B, что и выражение, стоящее в квадратных скобках, которое обозначим через x:

$$x = 2 - \cos(A-B)\cdot\cos(A+B) - \cos^2(A+B).$$

Из этого равенства следует, что

$$x = 2 + \frac{1}{4}\cos^2(A-B) - \left[\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2;$$

x достигает максимума, если $\cos^2(A-B) = 1$ и $\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B) = 0$.

Из уравнения $\cos^2(A-B)=0$ следует, что $A=B$, а поэтому уравнение $\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)=0$ приводится к виду $\cos 2A=-\frac{1}{2}$; следовательно, $2A=\frac{2\pi}{3}$, $A=B=\frac{\pi}{3}$, поэтому $C=\frac{\pi}{3}$.

Отв. Треугольник, вписанный в данную окружность, у которого сумма квадратов сторон имеет наибольшую величину, равносторонний.

680. Пусть треугольник SAB — осевое сечение некоторого конуса, описанного около шара данного радиуса, с центром в точке O (рис. 151). Обозначим угол OAD через α, где D — основание высоты. Имеем $AD=OD\cdot\operatorname{ctg}\alpha=r\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, $SD=AD\times\operatorname{tg}2\alpha=r\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha$. Объем конуса

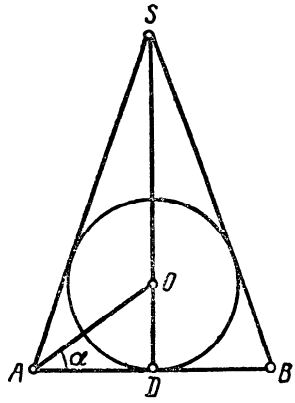

Рис. 151

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot AD^2\cdot SD=$$

$$=\frac{\pi}{3}r^3\cdot\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha=$$

$$=\frac{\pi}{3}r^3\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\pi}{3}\cdot r^3\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

Поскольку $\frac{2\pi r^3}{3}$ — постоянная величина, то объем конуса достигает наименьшего значения одновременно с выражением $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$.

Но выражение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$ имеет наименьшее значение, когда $\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ достигает наибольшего значения.

Так как $\operatorname{tg}^2\alpha+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=1$ — постоянная величина, то $\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ принимает наибольшее значение, когда $\operatorname{tg}^2\alpha=1-\operatorname{tg}^2\alpha$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{2}$. Итак,

$$V_{\min}=\frac{2\pi}{3}r^3\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{8\pi r^3}{3}.$$

681. Второе уравнение системы перепишем в виде

$$2(2\cos^2 x-1)+8\cos x\cdot\cos y+4\cos^2 y+4\sin^2 y+$$
$$+3-4\sin y=0,$$

или

$$4(\cos x+\cos y)^2+(2\sin y-1)^2=0. \qquad (1)$$

Поскольку $4(\cos x+\cos y)^2\geqslant 0$ и $(2\sin y-1)^2\geqslant 0$, то равенство (1) возможно лишь тогда, когда

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=0.\\ 2\sin y-1=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $\sin y=\frac{1}{2}$, откуда

$$y=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi. \tag{2}$$

Первое уравнение последней системы перепишем так:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения

$$\cos\frac{x+y}{2}=0 \text{ и } \cos\frac{x-y}{2}=0.$$

Из уравнения $\cos\frac{x+y}{2}=0$ находим

$$x+y=(2k+1)\cdot\pi. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) следует, что

$$x=(-1)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+(2k+1-n)\cdot\pi,\quad y=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi. \tag{4}$$

Проверкой легко убедиться, что найденные значения (4) x и y удовлетворяют данной системе (достаточно провести проверку по первому уравнению исходной системы). Из уравнения $\cos\frac{x-y}{2}=0$ находим

$$x-y=(2k+1)\pi. \tag{5}$$

Из формул (2) и (5) следует, что

$$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+(2k+1+n)\cdot\pi,\quad y=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi. \tag{6}$$

(n и $(2k+1+n)$ — числа различной четности).
Проверкой (достаточно по первому уравнению системы) убеждаемся, что x, y формул (6) не являются решениями данной системы. Следовательно, только формулы (4) служат решениями данной системы. Поскольку $(n-1)$ и $(2k+1-n)$ — числа одинаковой четности, то поэтому, полагая $n-1=m$, формулы (4) можно переписать в виде

$$x=(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+m\pi,\quad y=(-1)^{m+1}\cdot\frac{\pi}{6}+(2k+1-m)\cdot\pi.$$

Отв. $x=(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+m\pi$, $y=(-1)^{m+1}\cdot\frac{\pi}{6}+(2k+1-m)\pi$, где m и k — целые числа.

682. Первое решение. Разрешим данное уравнение относительно x. Имеем

$$x = -2\cos(xy) \pm \sqrt{4\cos^2(xy) - 4} =$$

$$= -2\cos(xy) \pm 2\sqrt{-\sin^2(xy)}.$$

Так как, по условию, число x должно быть действительным, то должно быть $-\sin^2(xy) = 0$. Последнее возможно при $\sin(xy) = 0$, откуда $xy = k\pi$. Теперь имеем $x = -2\cos(k\pi)$. Если k — четное, то $\cos(k\pi) = 1$ и $x = -2$, а потому $y = n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Если же k — нечетное, то $\cos(k\pi) = -1$ и $x = 2$, а поэтому $y = \frac{(2m+1)\pi}{2}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Второе решение. Данное уравнение можно представить в виде

$$[x + 2\cos(xy)]^2 + 4[1 - \cos^2(xy)] = 0,$$

или

$$[x + 2\cos(xy)]^2 + 4\sin^2(xy) = 0.$$

Поскольку сумма квадратов действительных чисел равна нулю лишь тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, то имеем систему $x + 2\cos(xy) = 0$, $\sin(xy) = 0$. Дальше, как в первом решении. Итак, уравнение имеет решения: $x_1 = -2$, $y_1 = n\pi$ и $x_2 = 2$, $y_2 = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, где m и n любые целые числа.

683. Перепишем данное неравенство последовательно так:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} - \frac{1}{2} < 0, \qquad \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < 0,$$

$$\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \cdot (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})}{(\operatorname{tg} x + 1) \cdot (\operatorname{tg} x - 1)} < 0,$$

$$(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \cdot (\operatorname{tg} x + 1) \cdot (\operatorname{tg} x - 1) \cdot (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) < 0.$$

Отсюда

$$-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < -1, \quad 1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}.$$

Следовательно, решениями данного неравенства служат те и только те числа, которые принадлежат промежуткам

$$k\pi - \frac{\pi}{3} < x < k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{3}.$$

684. Перепишем данное неравенство в виде

$$1 - \frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} + \frac{1}{4\cos^2 x - 3} < 0,$$

или

$$\frac{4\cos^2 x - \cos x - 2}{4\cos^2 x - 3} < 0.$$

Так как корнями числителя этого неравенства служат $\cos x = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$ и $\cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, а знаменателя — числа $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то данное неравенство можно представить так

$$\frac{\left(\cos x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\cdot\left(\cos x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)}{\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} < 0,$$

или

$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\cos x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\cdot\left(\cos x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\times$$
$$\times\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0.$$

Отсюда

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{1-\sqrt{33}}{8}, \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, данному неравенству удовлетворяют все числа из промежутков

$$\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} < x < \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} < x < \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}.$$

Других решений данное неравенство не имеет.

685. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(a+b)x}{2}\cdot\sin\frac{(b-a)x}{2}}{x^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{b^2-a^2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}} =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{b^2-a^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

686. Имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha^n}{(\sin\alpha)^m}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\dfrac{\sin\alpha^n}{\alpha^n}\cdot\alpha^n}{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^m\cdot\alpha^m}.$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha^n}{\alpha^n}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^m=1$, то искомый предел равен $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{n-m}$. Ясно, что если $n>m$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{n-m}=0$, если $n<m$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{n-m}=\infty$ и если $n=m$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{n-m}=1$.

687. Пусть O — искомая точка (рис. 152). Обозначим расстояния CB и CA от вершины прямого угла соответственно через a и b, углы AOC и BOC через β и α, отрезок OC через x.

Имеем

$$\theta=\beta-\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{x}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{b}{x}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b-a}{x+\dfrac{ab}{x}}.$$

Поскольку наибольшее значение острого угла θ достигается одновременно с наибольшим значением его тангенса и так как числитель $b-a$ есть постоянная величина, то надо найти наименьшее значение знаменателя $x+\dfrac{ab}{x}$.

Так как произведение слагаемых x и $\dfrac{ab}{x}$ есть постоянная величина, то сумма $x+\dfrac{ab}{x}$ принимает наименьшее значение при равенстве слагаемых.

Итак, $x=\dfrac{ab}{x}$, откуда $x=\sqrt{ab}$.

Отв. Искомая точка O отстоит от вершины прямого угла на расстоянии, равном $\sqrt{CA\cdot CB}$.

688. Известно, что

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)}$$

(формула Герона) Поскольку все четыре сомножителя, стоящие под радикалом, положительны, то для доказательства предложенного не-

равенства можно воспользоваться зависимостью между средним арифметическим и средним геометрическим положительных величин. В неравенство $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$, или $xyz \leqslant \frac{(x+y+z)^3}{27}$ подставили вместо x, y, z соответственно $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$. Имеем

$$4S = \sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2) - [(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]}{3\sqrt{3}} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4s\cdot\sqrt{3}$. Равенство достигается лишь при $a=b=c$, т. е. когда треугольник равносторонний.

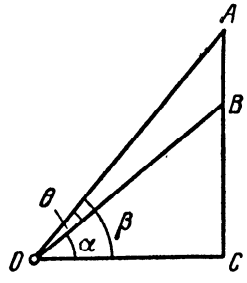

Рис. 152

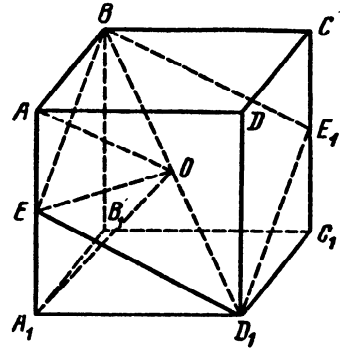

Рис. 153

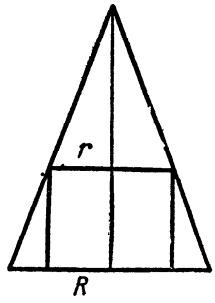

Рис. 154

689. Предварительно убедимся, что кратчайшим расстоянием между диагональю BD_1 и ребром AA_1 является отрезок OE, соединяющий их середины (рис. 153).

Известно, что кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми является их общий перпендикуляр. Докажем, что отрезок OE и есть общий перпендикуляр к BD_1 и AA_1. Очевидно, что треугольник BED_1 равнобедренный, а поэтому EO перпендикуляр к BD_1. Также ясно, что треугольник AOA_1 равнобедренный ($OA=OA_1$), а потому EO перпендикулярен к AA_1.

Сечение BED_1E_1 — параллелограмм; его площадь равна $BD_1\cdot EO$. Поскольку

любой отрезок, отличный от EO и соединяющий точки, принадлежащие BD_1 и AA_1 больше, чем EO, то очевидно, что утверждение задачи верно.

690. Обозначим через R радиус основания конуса, высоту его через H, радиус основания цилиндра через r, а высоту цилиндра через h.

Из рис. 154 усматриваем, что

$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R}, \text{ откуда } h=\frac{H}{R}\cdot(R-r).$$

Объем цилиндра

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\cdot\frac{H}{R}\cdot(R-r)=\frac{4\pi H}{R}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(R-r).$$

Поскольку $\frac{4\pi H}{R}$ — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с функцией

$$y=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(R-r).$$

Так как сумма сомножителей $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{2}$ и $(R-r)$ есть постоянная величина R, то y будет наибольшим при

$$\frac{r}{2}=R-r,$$

откуда $\frac{r}{R}=\frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

691. Первое решение. Решим данное уравнение относительно x.

$$x=\frac{\sin(xy)\pm\sqrt{\sin^2(xy)-4}}{2}.$$

Так как $\sin^2(xy)-4<0$, то x не является действительным числом, т. е. уравнение не имеет решений.

Второе решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$x^2-x\cdot\sin(xy)+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=0,$$

или

$$x^2-x\cdot\sin(xy)+\frac{1}{4}[\sin^2(xy)+\cos^2(xy)]+\frac{3}{4}=0,$$

или

$$\left[x-\frac{1}{2}\sin(xy)\right]^2+\left[\frac{1}{2}\cos(xy)\right]^2+\frac{3}{4}=0.$$

Так как левая часть есть сумма двух неотрицательных величин и положительного числа, то она не может равняться нулю. Следовательно уравнение не имеет решений.

692. Перепишем данное неравенство последовательно так

$$\frac{\sin x-2}{4\sin^2 x-1}-2>0,\quad \frac{\sin x-8\sin^2 x}{4\sin^2 x-1}>0,$$

$$\frac{\sin x\cdot\left(\sin x-\frac{1}{8}\right)}{\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)}<0,$$

$$\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\cdot(\sin x-0)\cdot\left(\sin x-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)<0.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{2}<\sin x<0,\quad \frac{1}{8}<\sin x<\frac{1}{2}.$$

Следовательно, данному неравенству удовлетворяют все числа из промежутков

$$2k\pi+\arcsin\frac{1}{8}<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi,\quad 2k\pi+\frac{5\pi}{6}<$$

$$<x<(2k+1)\cdot\pi-\arcsin\frac{1}{8},$$

$$(2k+1)\pi<x<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6},\quad 2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi.$$

Других решений данное неравенство не имеет.

693. Пусть $\arcsin x=\alpha$; тогда $x=\sin\alpha$. Заметим также, что если $x\to 0$, то и $\alpha\to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}.$$

694. Пусть $\angle CPQ=\alpha$, $\angle PQC=\beta$ (рис. 155). Тогда $\angle PRB=180°-(\alpha+\angle B)$, а $\angle ARQ=\alpha+\angle B$. Из треугольника RBP имеем $\frac{RB}{\sin\alpha}=\frac{BP}{\sin[180°-(\alpha+\angle B)]}$, или $\frac{RB}{\sin\alpha}=\frac{BP}{\sin(\alpha+\angle B)}$. Из треугольника PCQ находим $\frac{PC}{\sin\beta}=\frac{CQ}{\sin\alpha}$, а из треугольника AQR получаем $\frac{AQ}{\sin(\alpha+\angle B)}=\frac{AR}{\sin\beta}$.

Перемножив почленно полученные три равенства, приходим к равенству $RB \cdot PC \cdot QA = PB \cdot QC \cdot RA$. Отсюда следует

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1.$$

695. Обозначим через R радиус шара, а через r и h соответственно радиус основания и высоту цилиндра (рис. 156). Пусть точка M — середина высоты цилиндра (центр шара), O — центр основания цилиндра и A — произвольная точка окружности того же основания.

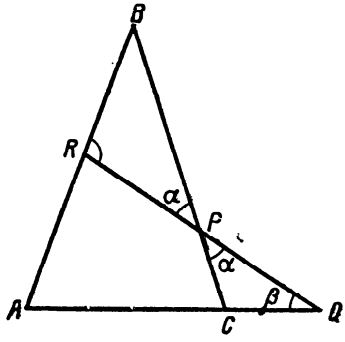

Рис. 155

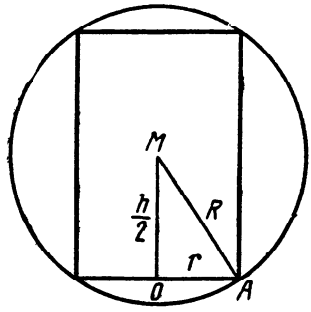

Рис. 156

По теореме Пифагора имеем

$$OM^2 = AM^2 - OA^2,$$

или

$$\frac{h^2}{4} = R^2 - r^2,$$

откуда

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Боковая поверхность цилиндра

$$S = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Ясно, что S и S^2 достигают наибольшего значения при одном и том же значении r. Поэтому будем искать то значение r, при котором S^2 принимает максимальное значение.

Имеем $S^2 = 16\pi^2 r^2 (R^2 - r^2)$.

Так как $16\pi^2$ — постоянная величина, то S^2 достигает максимального значения одновременно с выражением $y = r^2(R^2 - r^2)$.

Поскольку сумма $r^2 + (R^2 - r^2) = R^2$ — постоянная величина, то y достигает наибольшего значения при равенстве r^2 и $R^2 - r^2$.

Итак,

$$r^2 = R^2 - r^2,$$

откуда

$$r = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

а следовательно, $h = R\sqrt{2}$ и $2r = R\sqrt{2}$.

Таким образом, осевое сечение искомого цилиндра есть квадрат.

696. Первое решение. Перепишем данное уравнение в виде $2(\cos x + \cos y) = 2\cos(x+y) + 2 + 1$. Так как $2 = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y$, то имеем

$$2(\cos x + \cos y) = 2\cos(x+y) + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + 1,$$

или

$$2(\cos x + \cos y) = 2\cos x \cdot \cos y - 2\sin x \cdot \sin y + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + 1,$$

или

$$2(\cos x + \cos y) = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 + 1, \text{ или}$$

$$(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x + \cos y - 1)^2 = 0.$$

Так как сумма квадратов действительных чисел может равняться нулю лишь тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 0, \\ \cos x + \cos y - 1 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $x_1 = y + 2n\pi$, или $x_2 = -y + (2k+1)\pi$. Подставляя значение x_1 во второе уравнение системы и решая его, получим $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi$. Подставляя во второе уравнение значение x_2, легко убедиться, что получается уравнение, которое не имеет решений. Итак, все пары чисел $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi(m+n)$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, где m и n — любые целые числа, являются решениями данного уравнения.

Второе решение. Так как $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$ и $\cos(x+y) = 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1$, то данное уравнение можно переписать в таком виде

$$\cos^2\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2} + \frac{1}{4} = 0.$$

Решим это уравнение относительно $\cos\frac{x+y}{2}$. Имеем

$$\cos\frac{x+y}{2}=\frac{\cos\frac{x-y}{2}\pm\sqrt{\cos^2\frac{x-y}{2}-1}}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x-y}{2}\pm\sqrt{-\sin^2\frac{x-y}{2}}}{2}.$$

Ясно, что $\cos\frac{x+y}{2}$ действительно лишь тогда, когда $\sin\frac{x-y}{2}=0$, т. е. когда $\frac{x-y}{2}=n\pi$, или $x-y=2n\pi$. Теперь, подставляя $x=y+2n\pi$ в данное уравнение, получим уравнение $\cos^2 y-\cos y+\frac{1}{4}=0$. Отсюда $y=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$. Дальше, как в первом решении.

Третье решение. Как и во втором решении, имеем

$$\cos^2\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}+\frac{1}{4}=0,$$

или

$$\cos^2\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}+\frac{1}{4}\left[\cos^2\frac{x-y}{2}+\sin^2\frac{x-y}{2}\right]=0,$$

или

$$\left(\cos\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2=0,$$

откуда следует система уравнений

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x-y}{2}=0,\\[2ex]\cos\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=0.\end{cases}$$

Решая систему, получим все искомые пары чисел x, y.

697. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sin^2 x-2\sin x\cdot\sin y+\sin^2 y-(1-\cos^2 y)-3\cos^2 y+\cos^4 y+2=0,$$

или

$$(\sin x-\sin y)^2+(1-\cos^2 y)^2=0, \text{ или}$$

$$(\sin x-\sin y)^2+\sin^4 y=0.$$

Ясно, что уравнение выполняется лишь при $\sin x=\sin y=0$. Отсюда $x=m\pi$, $y=n\pi$, где m и n — любые целые числа.

698. Решая квадратное неравенство относительно $\operatorname{arctg} x$, получаем

$$\operatorname{arctg} x>3 \text{ или } \operatorname{arctg} x<1. \qquad (1)$$

Также имеем (по определению)

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 1$, откуда $-\infty < x < \operatorname{tg} 1$.

Отв. Все числа из промежутка $(-\infty, \operatorname{tg} 1)$.

699. Область допустимых значений x находится из неравенства $-1 \leqslant x^2 - 2x - 2 \leqslant 1$, или

$$1 \leqslant x^2 - 2x \leqslant 3. \qquad (1)$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\sin[\arcsin(x^2 - 2x - 2)] > \sin\frac{\pi}{4}, \text{ или}$$

$$x^2 - 2x > 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует $2 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x^2 - 2x \leqslant 3$. Из неравенства $2 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x^2 - 2x$ получаем

$$x < 1 - \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ или } x > 1 + \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad (3)$$

а из неравенства $x^2 - 2x \leqslant 3$ находим

$$-1 \leqslant x \leqslant 3. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что решениями данного неравенства являются все числа из промежутков

$$-1 \leqslant x < 1 - \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad 1 + \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}} < x \leqslant 3.$$

700. Имеем

$$\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdots \cos\frac{x}{2^n} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin\frac{x}{2^n} \cdot \cos\frac{x}{2^n} \cdot \cos\frac{x}{2^{n-1}} \cdots \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{2}}{2 \cdot \sin\frac{x}{2^n}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos\frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos\frac{x}{2^{n-2}} \cdots \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{2}}{2 \cdot \sin\frac{x}{2^n}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cdots\cos\frac{x}{2}}{2^2\cdot\sin\frac{x}{2^n}} = \ldots = \frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}} = \frac{\frac{\sin x}{x}}{1} = \frac{\sin x}{x}.$$

701. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1,$$ что очевидно.

702. На продолжении стороны AB (рис. 157) отложим отрезок BD. Такой же длины отрезок CE отложим на стороне CA, Проводим прямую DE, которая пересекает BC в точке M под некоторым углом, который обозначим через α.

По теореме синусов из треугольников BDM и ECM имеем

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{DM}{\sin\angle B} \text{ и } \frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{EM}{\sin\angle C}.$$

Учитывая, что $BD=CE$, из полученных двух равенств находим $\frac{DM}{ME} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$. Но так как из данного треугольника ABC следует, что $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$, то $\frac{DM}{ME} = \frac{AC}{AB}$, что и требовалось доказать.

703. Поскольку угол ADB (рис. 158) — прямой, то прямая BD касается окружности CMD, откуда следует, что $\angle CDB = 180° - \angle CMD = \angle CMQ$. С другой стороны, $\angle CDB = \angle CPB$, как вписанные. Следовательно, $\angle CMQ = \angle CPB$ и потому прямая MQ параллельна PB. Далее, $\angle DQB = \angle CPB$, так как дуги BC и BD равны. Таким образом, $\angle DQB = \angle CMQ$, а потому прямая BQ параллельна PM. Итак, четырехугольник $MPBQ$ — параллелограмм. Остается доказать вторую часть утверждения задачи. Поскольку $\angle CMN =$

$= \angle QBN = \angle QDN$, $\angle CNB = \angle DNB$, то треугольники CMN и MDN подобны, а потому $MN^2 = NC \cdot ND$, что и требовалось доказать.

704. Обозначим через R и H соответственно радиус основания и высоту конуса, а через r и h радиус основания и высоту искомого цилиндра (рис. 159).

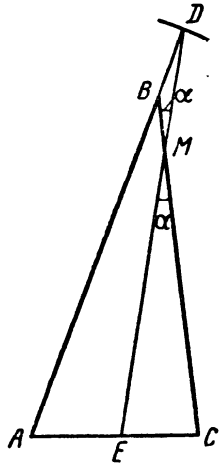

Рис. 157

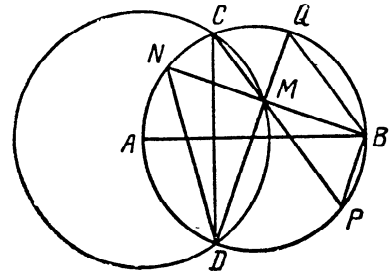

Рис. 158

Пусть точка O — центр основания конуса, A — произвольная точка окружности его основания, точка K — центр основания цилиндра (не лежащего в одной плоскости с основанием конуса), B — точка окружности того же основания.

Из подобия треугольников SKB и SOA следует

$$\frac{SK}{SO} = \frac{BK}{AO},$$

или в наших обозначениях

$$\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R},$$

откуда

$$h = \frac{H}{R} \cdot (R - r).$$

Боковая поверхность цилиндра

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh = 2\pi r \frac{H}{R}(R - r) = \frac{2\pi H}{R}(-r^2 + Rr).$$

Так как $\frac{2\pi H}{R}$ — постоянная величина, то $S_{\text{бок}}$ принимает максимальное значение, когда функция

$$y = -r^2 + Rr$$

достигает максимума. Функция y достигает максимума при

$$r = -\frac{R}{-2} = \frac{R}{2},$$

а следовательно,

$$h = \frac{H}{R}\left(R - \frac{R}{2}\right) = \frac{H}{2},$$

что и требовалось доказать.

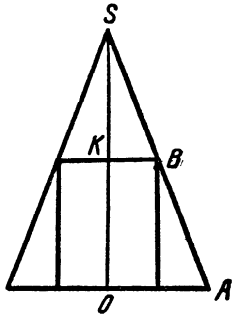

Рис. 159

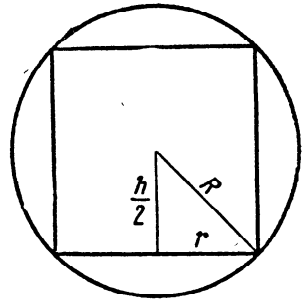

Рис. 160

705. Обозначим радиус основания цилиндра через r, а его высоту через h (рис. 160).

Из рис. 160 видим, что

$$\frac{h^2}{4} = R^2 - r^2, \text{ откуда } h = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Объем цилиндра

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Так как 2π — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с функцией

$$y = r^2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Ясно, что y^2 и y принимают наибольшие значения при одном и том же значении переменной r, поэтому будем находить значение r, для которого y^2 достигает максимума.

Имеем

$$y^2 = r^4 \cdot (R^2 - r^2),$$

или

$$y^2 = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (R^2 - r^2).$$

Поскольку сумма трех сомножителей $\frac{r^2}{2}$, $\frac{r^2}{2}$ и (R^2-r^2) равна постоянной величине, то y^2, а следовательно, и y, достигают наибольшей величины при равенстве этих сомножителей, т. е. при

$$\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2,$$

откуда

$$\frac{3r^2}{2} = R^2,$$

или окончательно,

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

706. Первое решение. Преобразуем левую часть решаемого уравнения таким образом

$$\sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x} + 4 = (\sin^4 x + \cos^4 x) \times$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}\right) + 4 = (1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \times$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}\right) + 4 = \left(1 - \frac{1}{2}\cdot \sin^2 2x\right)\cdot\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4.$$

Таким образом, данное уравнение принимает вид

$$(2 - \sin^2 2x)\cdot\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) = 16 + \sin y.$$

Но $2-\sin^2 2x \geqslant 1$, $1+\frac{16}{\sin^4 2x} \geqslant 17$, причем знаки равенства имеют место тогда и только тогда, когда $\sin^2 2x = 1$. Поэтому левая часть данного уравнения больше или равна 17, а правая часть меньше или равна 17. Следовательно, данное уравнение выполняется лишь тогда, когда выполняется система уравнений

$$\sin^2 2x = 1, \quad \sin y = 1, \quad \text{откуда } x = \frac{\pi}{4}(2k+1), \quad y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

где k и n принимают любые целые значения.

Второе решение. Так как среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, то имеем

$$12 + \frac{1}{2}\sin y \geqslant 2\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right),$$

или

$$6+\frac{1}{4}\sin y \geqslant \sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}+\operatorname{tg}^2 x+$$

$$+\operatorname{ctg}^2 x \geqslant 4\frac{1}{4}+2 \left(\text{так как } \sin^2 x\cos^2 x \leqslant \frac{1}{4}\right).$$

Следовательно, $\sin y \geqslant 1$. Но поскольку $\sin y \leqslant 1$, то имеем лишь $\sin y=1$, откуда $y=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Если $\sin y=1$, то должно быть $\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{ctg}^2 x$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

707. Пусть $|\lg x|=z$, тогда решаемое неравенство перепишется в виде

$$\sin z+\cos z>\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{1}$$

Умножив обе части неравенства (1) на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z+$ $+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z>\frac{1}{2}$, или $\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$, откуда $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<z-$ $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и

$$-\frac{\pi}{12}+2k\pi<z<\frac{7\pi}{12}+2k\pi. \tag{2}$$

Так как $z\geqslant 0$, то $k=1, 2, 3, \ldots$ Кроме того, в формуле (2) при $k=0$ возможно лишь

$$0\leqslant z<\frac{7\pi}{12}. \tag{3}$$

Поскольку $z=|\lg x|$, то (3) перепишется в виде

$$0\leqslant|\lg x|<\frac{7\pi}{12}. \tag{4}$$

Если $\lg x\geqslant 0$, то из (4) следует $0\leqslant\lg x<\frac{7\pi}{12}$, откуда

$$1\leqslant x<10^{\frac{7\pi}{12}} \tag{5}$$

Если же $\lg x<0$, то из (4) имеем $0<\lg\frac{1}{x}<\frac{7\pi}{12}$, откуда $1<\frac{1}{x}<$ $<10^{\frac{7\pi}{12}}$, и

$$10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 1. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что все числа из промежутка $10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}}$ удовлетворяют данному неравенству.

Вернемся к неравенству (2), которое перепишем в виде

$$-\frac{\pi}{12} + 2k\pi < |\lg x| < \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \qquad (7)$$

где $k=1, 2, 3, \ldots$ Если $\lg x>0$, то (7) имеет вид $-\frac{\pi}{12}+2k\pi<\lg x<\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, откуда все числа из промежутка $10^{-\frac{\pi}{12}+2k\pi} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}+2k\pi}$ удовлетворяют данному неравенству. Если же $\lg x<0$, то (7) примет вид $-\frac{\pi}{12}+2k\pi<\lg\frac{1}{x}<\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, откуда $10^{-\frac{\pi}{12}+2k\pi} < \frac{1}{x} < 10^{\frac{7\pi}{12}+2k\pi}$. Следовательно, и все числа из промежутка $10^{-\frac{7\pi}{12}-2k\pi} < x < 10^{\frac{\pi}{12}-2k\pi}$ удовлетворяют решаемому неравенству.

Отв.

$$10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}},\ 10^{-\frac{\pi}{12}+2k\pi} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}+2k\pi},$$
$$10^{-\frac{7\pi}{12}-2k\pi} < x < 10^{\frac{\pi}{12}-2k\pi},$$

где $k=1, 2, 3, \ldots$

708. Пусть a — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию $1\leqslant a\leqslant 100$.

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{10}}{x^{10}+10^{10}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{10}}{1+\left(\dfrac{10}{x}\right)^{10}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Поскольку

$$\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+(x+3)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}} =$$

$$= \frac{(x+1)^{10}}{x^{10}+10^{10}} + \frac{(x+2)^{10}}{x^{10}+10^{10}} + \frac{(x+3)^{10}}{x^{10}+10^{10}} + \cdots + \frac{(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}},$$

то $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+(x+3)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}} =$$

$$= 1 \cdot 100 = 100.$$

709. В треугольнике ABC (рис. 161) пусть AH — высота, опущенная из вершины A, AA_1 — диаметр описанного круга. Треуголь-

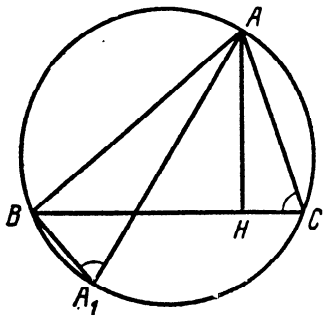

Рис. 161

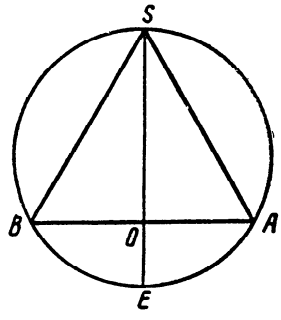

Рис. 162

ники AHC и ABA_1 — прямоугольные, один с прямым углом при вершине H, другой с прямым углом при вершине B. Они имеют по равному острому углу ($\angle A_1 = \angle C$, как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу AB). Следовательно, эти треугольники подобны. Поэтому $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AA_1}$, откуда $AB \cdot AC = AH \cdot AA_1$, что и требовалось доказать.

710. Обозначим через R радиус шара и через r и h соответственно радиус основания и высоту конуса (рис. 162). Продолжим высоту SO конуса до встречи с шаровой поверхностью в точке E. Так как $SE = 2R$, а $SO = h$, то $OE = 2R - h$.

На основании теоремы, что перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится диаметр основанием этого перпендикуляра, имеем

$$AO^2 = SO \cdot OE,$$

или в наших обозначениях

$$r^2 = h \cdot (2R - h).$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} h^2 \cdot (2R - h) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot (2R - h).$$

Так как $\frac{4\pi}{3}$ — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с произведением $y=\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h)$.

Поскольку сумма сомножителей $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{2}$ и $(2R-h)$ есть постоянная величина $2R$, то y достигает максимума при равенстве этих сомножителей, т. е. при

$$\frac{h}{2}=2R-h,$$

откуда

$$\frac{R}{h}=\frac{3}{4}.$$

711. Поскольку правая часть заданного неравенства неотрицательная, то $\sin x>0$. Поэтому, возвышая в квадрат обе части неравенства, получим равносильное ему неравенство

$$\sin^2 x > 1-\sin 2x,$$

или

$$2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x-1>0,$$
$$2\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x>0,$$
$$\cos x\,(2\sin x-\cos x)>0.$$

Решение этого неравенства сводится к решению двух систем неравенства

$$\begin{cases}\cos x<0,\\ 2\sin x-\cos x<0\end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases}\cos x>0,\\ 2\sin x-\cos x>0.\end{cases} \tag{2}$$

Но так как $\sin x>0$, то система (1) противоречива. Остается одна система

$$\sin x>0,\ \cos x>0,\ 2\sin x-\cos x>0,$$

или

$$\sin x>0,\ \cos x>0,\ \operatorname{tg} x>\frac{1}{2}.$$

Ясно, что x находится в первом квадранте, поэтому

$$2\pi k+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \text{где}\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

712. Неравенство $4\sin x \cdot \sin 3x < 1$ равносильно таким:

$$2\cos 2x - 2\cos 4x < 1,$$

$$2\cos 2x - 4\cos^2 2x + 2 - 1 < 0, \quad 4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 1 > 0.$$

Пусть $\cos 2x = t$, тогда это неравенство принимает вид

$$4t^2 - 2t - 1 > 0.$$

Если $f(t) = 4t^2 - 2t - 1$, то корни $f(t)$ суть

$$t_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Так как $f(t) > 0$, то $t < \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, или $t > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, т. е.

$$-1 \leqslant \cos 2x < \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \tag{1}$$

или

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} < \cos 2x \leqslant 1. \tag{2}$$

Так как

$$\cos 108^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ и } \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

то из (1) следует $\frac{3\pi}{5} + 2k\pi < 2x < \frac{7\pi}{5} + 2k\pi$, а из (2) следует $-\frac{\pi}{5} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{5} + 2k\pi$.

Отв. $\frac{3\pi}{10} + k\pi < x < \frac{7\pi}{10} + k\pi$, $-\frac{\pi}{10} + k\pi < x < \frac{\pi}{10} + k\pi$.

713. Перепишем данное уравнение в следующем виде

$$\left(\sin^2 x - 2\sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \sin y + 2\sin^2 y\right) +$$

$$+ \left(\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + 3\operatorname{tg}^2 y\right) = 0,$$

или

$$\left(\sin x - \sqrt{2} \cdot \sin y\right)^2 + \left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} y\right)^2 = 0.$$

Последнее возможно тогда и только тогда, когда выполняется система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin y, \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} y, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\cdot\sin y, \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sin y\cdot\cos x}{\cos y}. \end{cases}$$

Таким образом, $\sqrt{2}\cdot\sin y - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sin y\cdot\cos x}{\cos y} = 0$, или

$$\sin y\left(\sqrt{2}\cdot\cos y - \sqrt{3}\cdot\cos x\right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения

$$\sin y = 0, \tag{1}$$

$$\sqrt{2}\cdot\cos y - \sqrt{3}\cdot\cos x = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (1) следует $y_1 = k\pi$. Подставляя $y = k\pi$ в первое уравнение системы, получим $\sin x = 0$ и $x_1 = n\pi$. Уравнение (2) перепишем в виде $\sqrt{2}\cdot\cos y = \sqrt{3}\cdot\cos x$. Возвышая в квадрат обе части этого уравнения, получим $2\cos^2 y = 3\cos^2 x$. Теперь, возводя в квадрат обе части первого уравнения системы, получим $\sin^2 x = 2\sin^2 y$.

Решим совместно уравнения

$$\sin^2 x = 2\sin^2 y, \quad 2\cos^2 y = 3\cos^2 x,$$

или

$$\sin^2 x = 2 - 2\cos^2 y, \quad \sin^2 x = \frac{3 - 2\cdot\cos^2 y}{3}.$$

Отсюда

$$2 - 2\cos^2 y = \frac{3 - 2\cos^2 y}{3},$$

или

$$\cos^2 y = \frac{3}{4}, \quad \cos y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = m\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

Подставляя $y = m\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$ в уравнение $\sin x = \sqrt{2}\cdot\sin y$ системы, получим $\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_2 = l\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$. Так как мы в процессе решения возводили уравнения в квадрат, то значения x_2, y_2 надо испытать. Подставляем их значения в уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} y$. Имеем $\operatorname{tg}\left(l\pi \pm \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\left(m\pi \pm \dfrac{\pi}{6}\right)$. Период тангенса π, поэтому имеем $\operatorname{tg}\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)$, или $\pm 1 = \sqrt{3}\cdot\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Итак, урав-

нение удовлетворяется, если брать одновременно верхние или одновременно нижние знаки в последнем равенстве. Теперь подставим значения x_2, y_2 в уравнение $\sin x=\sqrt{2}\cdot\sin y$. Имеем $\sin\left(l\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\sqrt{2}\cdot\sin\left(m\pi\pm\frac{\pi}{6}\right)$. Если брать одновременно оба верхних или оба нижних знака, то последнее равенство можно переписать так: $\cos l\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos m\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos l\pi=\cos m\pi$, $(-1)^l=(-1)^m$. Отсюда заключаем, что l и m нужно брать одновременно четные или нечетные. Поэтому система имеет следующие решения $x_1=n\pi$, $y_1=k\pi$, $x_2=l\pi+\frac{\pi}{4}$, $y_2=m\pi+\frac{\pi}{6}$, $x_3=l\pi-\frac{\pi}{4}$, $y_3=m\pi-\frac{\pi}{6}$, где m, n, k, l — любые целые числа, причем l и m надо брать одновременно четные или нечетные.

714. Левую часть решаемого уравнения преобразуем так

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 y+$$
$$+\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y)=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y-\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y)^2+4.$$

Следовательно, данное уравнение перепишется в виде

$$(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y-\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y)^2+1=\sin^2(x+y).$$

Так как $(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y-\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y)^2+1\geqslant 1$, а $\sin^2(x+y)\leqslant 1$, то уравнение выполняется лишь тогда, когда обе его части равны 1, т. е. когда выполняется система уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y,\\ \operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 y=1,\\ \sin^2(x+y)=1.\end{cases}$$

Из первых двух уравнений этой системы следует, что $\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y=1$, т. е. $\operatorname{tg} x=\pm 1$, $\operatorname{tg} y=\pm 1$. Отсюда получаем $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $y=$ $=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, где k и n — любые целые числа. Ясно, что из всех найденных пар значений x и y только те пары служат решениями данного уравнения, которые удовлетворяют третьему уравнению системы. Имеем

$$\sin^2(x+y)=\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(2k+1)+\frac{\pi}{4}(2n+1)\right]=$$
$$=\sin^2\left[\frac{\pi}{2}\cdot(k+n+1)\right].$$

Отсюда видно, что $\sin^2(x+y)=1$, если $k+n+1$ нечетное, и $\sin^2(x+y)=0$, если $k+n+1$ четное. Таким образом, решениями данного уравнения являются все пары найденных выше значений x, y, когда $k+n+1$ нечетное, т. е. когда $k+n$ четное. Пусть $k+n=2m$, т. е.

$n=2m-k$, где m — любое целое число. Итак, всеми решениями данного уравнения являются все пары чисел x, y:

$$x=\frac{\pi}{4}\cdot(2k+1),\quad y=\frac{\pi}{4}\cdot(4m-2k+1),$$

где k и m — любые целые числа.

715. Имеем

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3},$$
$$\frac{3^3-1}{3^3+1}=\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}=\frac{(n-2)\cdot(n^2-n+1)}{n(n^2-3n+3)},$$
$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)\cdot(n^2+n+1)}{(n+1)\cdot(n^2-n+1)}.$$

Перемножив почленно все эти равенства, получим

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\ldots(n+1)}\times$$
$$\times\frac{7\cdot 13\cdot 21\ldots(n^2-n+1)(n^2+n+1)}{3\cdot 7\cdot 13\cdot 21\ldots(n^2-n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\times$$
$$\times\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right).$$

Таким образом, доказываемое равенство можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)\right]=\frac{2}{3},$$

что очевидно.

716. Вначале заметим, что

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}.$$

Придавая в этой формуле k значения 1, 2, 3, ..., n, получим n равенств

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3},$$
$$\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4},$$
$$\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n},$$
$$\frac{2}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1},$$
$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}.$$

Сложив почленно эти n равенств, получим

$$\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}.$$

Таким образом, левая часть доказываемого равенства перепишется в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2-2}{n^2+3n+2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2+3n+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2},\ \text{так как}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2+3n+2}=0.$$

717. Для удобства введем следующие обозначения (рис. 163)

$$QC=x,\ PC=y,\ AC=CB=a,\ \angle PCM=\angle QCN=\alpha,$$
$$\angle LCP=\angle QCK=\beta,\ \angle NML=\angle NKL=\gamma.$$

Так как, если хорды пересекаются внутри круга, то произведения отрезков каждой из хорд есть постоянная величина, то

$$NQ\cdot QK=AQ\cdot QB=a^2-x^2.$$

Из треугольника NQC находим

$$NQ=\frac{x\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

а из треугольника QCK следует

$$QK=\frac{x\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Перемножив последние два равенства, получаем

$$NQ\cdot QK=\frac{x^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}=a^2-x^2.$$

Отсюда

$$x = a\sqrt{\frac{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}}.$$

Аналогично можно найти

$$y = a\sqrt{\frac{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}}.$$

Из последних двух равенств следует утверждение задачи ($x=y$).

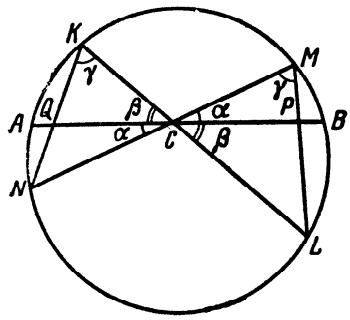

Рис. 163

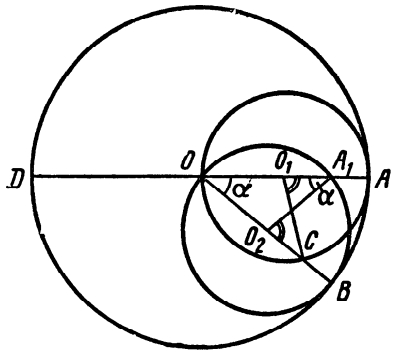

Рис. 164

718. Пусть в некоторый момент окружности $(O, 2R)$ и (O_1, R) имеют внутреннее касание в точке A (рис. 164). Пусть затем окружность (O_1, R) переходит в окружность (O_2, R), касающуюся окружности $(O, 2R)$ в точке B. Проводим радиус $OB=2R$. Пусть A_1 — точка пересечения окружности O_2 с диаметром AD окружности O. Если $\angle AOB=\alpha$, то $\angle AO_1C=2\alpha$, $\angle A_1O_2B=2\alpha$ (α и 2α — радианное измерение углов). Поэтому $\cup AB=2R\cdot\alpha$, $\cup AC=R\cdot 2\alpha=2R\alpha$, $\cup A_1B=R\cdot 2\alpha=2R\alpha$. Следовательно, дуги AB, AC и A_1B имеют одинаковые длины $(2R\alpha)$. Поэтому при перемещении центра меньшей окружности из точки O_1 в точку O_2 точка A малой окружности перейдет в точку A_1, т. е. точка A (малой окружности) перемещается по отрезку AD — диаметру окружности O. Таким образом, точка A меньшей окружности движется по диаметру AD большей окружности. Причем, если точка A малой окружности придет в точку A большей окружности, то точка A пробегает диаметр AD дважды.

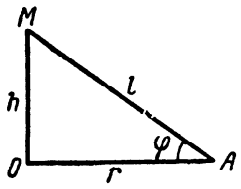

Рис. 165

719. Пусть измерения параллелепипеда x, y, z, тогда его полная поверхность равна $2(xy+xz+yz)$. Очевидно, что

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy,\ x^2 + z^2 \geqslant 2xz,\ y^2 + z^2 \geqslant 2yz.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(xy + xz + yz).$$

Но так как $x^2+y^2+z^2=a^2$, то $2(xy+xz+yz)\leqslant 2a^2$. Следовательно, наибольшая поверхность равна $2a^2$, причем, найденный параллелепипед — куб.

720. Обозначим радиус стола через r, центр его через O, высоту лампы над столом через h, расстояние AM от края стола до лампы M через l и угол MAO через φ (рис. 165).

Из курса физики известно, что сила света I в точке A выражается формулой

$$I = k\frac{\sin\varphi}{l^2},$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности.

Так как $\cos\varphi=\frac{r}{l}$, то

$$I = \frac{k}{r^2}\cdot\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Поскольку I достигает максимума вместе с I^2, то рассмотрим

$$I^2 = \frac{k^2}{r^4}\sin^2\varphi\cos^4\varphi = \frac{4k^2}{r^4}\cdot(1-\cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}.$$

Так как $\frac{4k^2}{r^4}$ — постоянная величина, то I^2 достигает максимума вместе с функцией

$$y = (1-\cos^2\varphi)\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}.$$

Поскольку сумма сомножителей $(1-\cos^2\varphi)$, $\frac{\cos^2\varphi}{2}$ и $\frac{\cos^2\varphi}{2}$ есть постоянная величина 1, то y принимает наибольшее значение при $1-\cos^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{2}$, т. е. при $\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

А так как $h=r\cdot\operatorname{tg}\varphi$, то

$$h = r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7r.$$

Израиль Хаимович Сивашинский

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

Редактор *А. М. Суходский*
Переплёт художника *А. Е. Коленкова*
Художественный редактор *В. И. Пономаренко*
Технический редактор *С. С. Якушкина*
Корректор *В. И. Мишанина*

Сдано в набор 24/XI-69 г. Подписано к печати 13/IV-70 г. Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Объем 14 печ. л. 23,52 усл. печ. л. 19,04 уч.-изд. л. Тираж 250.000 экз. Зак. № 1528. Изд. № ФМ-433. Цена 61 коп.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1970 г. Позиция № 211.

Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14.
Издательство «Высшая школа».

Владимирская типография Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
гор. Владимир, ул. Победы, 18б.